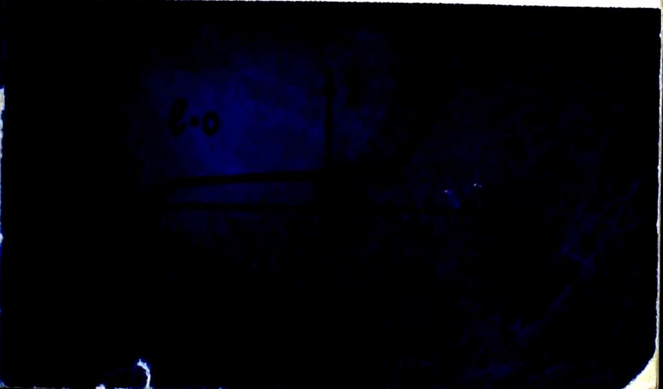
С. М. МУСАЕВ

ЭЛЕМЕНТАРДЫК ФУНКЦИЯЛАР ЖАНА АЛАРДЫ ИЗИЛДӨӨ



С. М. МУСАЕВ

ЭЛЕМЕНТАРДЫК ФУНКЦИЯЛАР ЖАНА АЛАРДЫ ИЗИЛДӨӨ

С. М. МУСАЕВ

ЭЛЕМЕНТАРДЫК ФУНКЦИЯЛАР ЖАНА АЛАРДЫ ИЗИЛДӨӨ

Кыргыз ССРинин жогорку жана атайын
орто билим берүү министерствосу
педагогикалык институттардын
физика-математика факультеттеринин студенттери
үчүн окуу куралы катары бекиткен

ФРУНЗЕ «МЕКТЕП» 1987

22. 161 я 73
М 91

Мусаев С. М.

М 91 Элементардык функциялар жана аларды изилдөө: Пед. ин-тардын физика-математика фак-теринин студент. үчүн окуу куралы. — Ф.: Мектеп, 1987.—200 б.

Окуу куралы пединститутта мугалим болуп иштеген көп жылдык тажрыйбасынын негизинде жазылган. Элементардык функцияга, алардын графигин түзүүгө жана элементардык функциялардын бардык касиеттерин аналитикалык жол менен изилдөөгө кеңири орун берилген.

Окуу куралы физика-математика факультеттеринин студенттерине арналган, аны жалпы билим берүүчү мектептердин мугалимдери пайдаланса да болот.

$М \frac{1702050000—117}{М\ 452\ (17)—87}$ 60.87 ББК 22. 161 я 73

Рецензенти Майлиев Ш.— педагогика илимдеринин кандидаты

КИРИШҮҮ

Бул окуу куралы жалпысынан педагогикалык институттардын математика жана физика-математика факультеттери үчүн математикалык анализ курсунун программасынын «Функция», «Элементардык функциялар» бөлүмдөрүнө ылайык жазылды. Ал күндүзгү окуган, ошондой эле сырттан окуган студенттерге, мугалимдерге, билимин өз алдынча көтөргөн адамдарга арналат.

Мектепте негизинен элементардык функциялар окутулары жана аны терен жана негиздеп окутуу талаптарын эске алуу менен пр[illegible] талап кылынгандан бир топ кеңири жана [illegible] түрдө [illegible]ци.

Программада «Элементардык функциялар» темасы «Пределдер» жана «Үзгүлтүксүздүк» темаларынан кийин берилгендиктен, бул окуу куралында пределдердин жана үзгүлтүксүздүктүн тиешелүү теориялары студенттерге тааныш деп эсептедик.

Дифференциалдык эсептөөнүн каражаттарын (туундуну) программа боюнча кийин окула тургандыгына карабастан, аларды функциялардын айрым касиеттерин изилдөөгө колдонуу көрсөтүлдү. Туундуну функцияны изилдөөгө ко[illegible] жалпы жана негизги метод болгондуктан, элементардык функцияларды окууну, изилдөөнү толук, бүткөн мүнөздө иштеп чыктык.

Анын үстүнө каралып жаткан айрым функциялардын тиешелүү касиеттерин элементардык жолдорду колдонуп изилдөө чоң кыйынчылыктарды пайда кылган учурда, изилдөөнүн каражаты катарында элементардык жолдор колдонулган жок. Бирок, көпчүлүк учурда функцияны монотондуулукка, экстремумга, томпоктук жана иймектикти изилдөөгө элементардык функцияны жана туундуну колдонуунун эки жолу тең пайдаланылганын айта кетүү керек. Биз мында иштеп жаткан жана келечектеги мугалимдер мектепте функцияны окутууда ылайыгына жараша каалаган жолду колдонууга мүмкүн экендигине негиздедик. Ал эми биринчи курстун студенттери жана туундуну окуй элек башка окуучулар, бул окуу куралын пайдаланган кезде функцияны изилдөөгө туундуну колдонгон учурларды убактысынча окубай таштап кетсе да болот.

Студенттердин жана өз алдынча окугандардын бул окуу куралын эффективдүү пайдалансын үчүн ар бир параграфтан кийин түшүнгөнүнө жооп берип, өзүн текшерүүгө суроолор берилди. Андан тышкары алган билимин практикада колдонууга, көнүгүүгө мисалдар жана маселелер берилди.

I ГЛАВА

ФУНКЦИЯ ЖӨНҮНДӨ ТҮШҮНҮК

§ 1. ФУНКЦИЯ ЖАНА АНЫН АНЫКТАМАСЫ

1. Турактуу жана өзгөрмө чоңдуктар. Бизди курчап турган айлана-чөйрөдө, жаратылышта, техникалык процесстерде кайсы бир чоңдуктар өз маанисин өзгөртүп турса, башка бирөөлөрү өзгөртүшпөйт. Мисалы, талаанын тик бурчтуу участогун трактор айдап жаткан процессти алып көрөлү. Бул процессте трактордун саны, анын дөңгөлөктөрүнүн саны, участоктун жалпы аянты, анын узуну жана туурасы ж. б. чоңдуктар өзгөрбөйт. Ал эми участоктун айдалган бөлүгүнүн аянты, айдала элек бөлүгүнүн аянты, трактордогу күйүүчү майдын, суунун запасы, мотордун цилиндриндеги температура, басымдар ж. б. өзгөрмө чоңдуктар болушат.

Каралып жаткан процессте бир гана сан мааниге ээ болгон чоңдуктар *турактуу чоңдуктар* деп аталат.

Берилген процессте бирден ашык сан маанилерге ээ болгон чоңдуктар *өзгөрмө чоңдуктар* деп аталат.

Чоңдуктардын өзгөрмө жана турактуу болушу каралып жаткан процесстеги, кубулуштагы шарттарга байланыштуу болот. Кандайдыр бир процессте, кубулушта турактуу болгон чоңдук экинчи бир процессте, кубулушта өзгөрмө боло алышат, б. а. чоңдуктардын өзгөрмө жана турактуу болушу салыштырмалуу мүнөзгө ээ. Мисалы, параллелограммды анын формасы өзгөрбөгөндөй кылып, бир жагынын айланасында айландырсак, анын аянты өзгөрбөйт, ошол эле параллелограммдын бир бурчун өзгөртүп (калган бурчтары да өзгөрөт) айландырсак, анын аянты өзгөрөт.

Математика илими чыныгы дүйнөнүн ар түрдүү кубулуштарын, жаратылышты жана техникалык процесстерди изилдеп үйрөнүүдө чоң мааниге ээ экени белгилүү. Буга математика илими, чоңдуктарды дайыма кыймылда, өзгөрүп турат деп карагандыктан жетишип отурат. Ошондуктан Ф. Энгельс XVII кылымда француз окумуштуусу Декарт тарабынан математикага өзгөрмө чоңдук түшүнүгүнүн киргизилгендигине өтө чоң баа берип, мындай деген:

«Математикадагы бурулуш пункт болуп, Декарттык өзгөрмө чоңдук эсептелет. Ошонун аркасында математикага кыймыл жана диалектика кирди...»[1]

2. Функция деген эмне? Чыныгы дүйнөдөгү, жаратылыштын кубулуштарындагы, техникалык процесстердеги өзгөрмө чоңдуктар ар бири өз алдынча обочолонуп өзгөрбөстөн, тескерисинче, бири бири менен тыгыз байланышта өзгөрөт, биринин өзгөрүшү экинчисинин өзгөрүшүнө алып келет. Мисалы, өткөргүчтүн учтарындагы чыңалууну канча эсе чоңойтсок, токтун күчү да ошончо эсе чоңоёру, ал эми өткөргүчтүн каршылыгын канча эсе чоңойтсок, токтун күчү, тескерисинче, ошончо эсе кичирейе тургандыгы чынжырдын участогу үчүн Омдун законунан белгилүү: $I=U:R$, мында U — өткөргүчтүн учтарындагы чыңалуу, R — өткөргүчтүн каршылыгы, I — токтун күчү. Тик бурчтуу үч бурчтуктун катеттеринин узундуктарынын өзгөрүшү анын гипотенузасынын узундугунун өзгөрүшүнө алып келери Пифагор теоремасынан белгилүү: $c=\sqrt{a^2+b^2}$, мында a, b — тик бурчтуу үч бурчтуктун катеттери, c — гипотенузасы. Бул айтылгандардан математика илими, чоңдуктарды бири биринен ажыратып карабастан, аларды өз ара байланышта, бири бирин шарттайт, бири бирине көз каранды деп кароо керектиги келип чыгат. Чоңдуктардын өз ара бири бирине байланыштуу өзгөрүшүн, математикалык жактан окуп үйрөнүү үчүн математикада функция түшүнүгү киргизилген.

Аныктама. *Бир өзгөрмө чоңдук x тин мүмкүн болуучу ар бир маанисине кандайдыр эрежениин негизинде экинчи бир өзгөрмө чоңдук y тин белгилүү бир мааниси туура келсе, экинчи өзгөрмө чоңдукту биринчи өзгөрмө чоңдуктун функциясы деп, биринчисин аргумент же көз каранды эмес өзгөрмө чоңдук деп аташат да,* $y=f(x)$ менен белгилешет.

Мисалы, $C=2\pi R$ (C — айлананын узундугу, R — радиусу). Айлананын узундугу радиустан функция болот, аны $C=f(R)$ деп да жазышат. Кашаанын алдындагы f тамгасы y өзгөрмөсү x тин функциясы экенин көрсөтөт, ошону менен бирге аргументтин ар бир берилген маанисине туура келген функциянын маанисин эсептеп табууга мүмкүндүк берүүчү законду (эрежени) да көрсөтөт. Мисалы, $y=f(x)=2x^2$, мында f тамгасы y тин маанисин табуу үчүн x тин берилген маанисин квадратка көтөрүп, аны 2 ге көбөйтүү керек деген ага туура келүү эрежесин

---

[1] *Ф. Энгельс.* Диалектика природы. М., 1975-жыл, 224-бет.

көрсөтөт. Эгер $x=3$ болсо, анда $y=f(3)=2\cdot3^2=18$ болот. Бирок, мындан дайым эле f тамгасын колдонуу керек деген келип чыкпайт. Ар кандай башка тамганы да колдонууга болот: $y=h(x)$, $y=g(x)$, $y=p(x)$ ж. б. Кашаанын астындагы тамганын берилген функциянын түрүнө эч бир тиешеси жок. Ар түрдүү функцияларды бир эле тамга менен белгилей берүүгө да болот: $h(x)=tgx$, $h(x)=x^3$, $h(x)=a^x$ ж. б. Бирок бир эле жерде, бир эле ой жүгүртүүдө чаташуу келип чыкпасын үчүн ар түрдүү функцияларды тиешелүү түрдө ар түрдүү тамга менен белгилөөгө туура келет: $f(x)=cosx$, $\varphi(x)=3x^2$, $h(x)=4:x$.

Жогоруда берилген функциянын аныктамасынын негизинде аргументтин мүмкүн болгон маанилеринин көптүгү (аныкталуу областы) жана ага туура келүүчү эреже белгилүү болсо, анда функция берилди деп айтышат. Азыркы кезде математикада «көптүк» жана «көптүктөрдүн түспөлдөшү» (отображения) түшүнүктөрүн колдонуу менен функция түшүнүгүнө көбүрөөк жалпы аныктама беришет.

Аныктама. M жана N каалаган элементтүү көптүктөр болушсун. Эгерде M көптүгүнүн ар бир элементи $x\in M$ ге кандайдыр бир жол менен N көптүгүнүн бир гана элементи $y\in N$ туура келсе, анда N көптүгүндө M көптүгүнүн f түспөлдөнүшү *берилди деп айтышат.*

f түспөлдөнүшүндө x элементине туура келген y элементи x элементинин түспөлү (образы) деп аталат да, $y=f(x)$ деп белгиленет. Мында x элементи y элементинин *баштапкы түспөлү* (прообразы) деп аталат.

f түспөлдөнүшүндө $A\subset M$ көптүгүнүн түспөлү деп, $x\in A$ болгондогу бардык $f(x)$ элементтеринин көптүгү аталат жана $f(A)$ деп белгилешет.

Аныктама. *N көптүгүндө M көптүгүнүн f түспөлдөнүшү берилген учурда, M көптүгүндө f функциясы аныкталды деп айтышат.* Бул функция N көптүгүнөн $y=f(x)$ маанилерин алышат. M көптүгү f функциясынын аныкталуу областы, x элементи аргумент, $f(M)$ көптүгү f функциясынын маанилеринин областы деп аталат. Мында $f(M)\subset N$ болот. Бул жалпы аныктамадан, функциянын аныкталуу областы да жана маанилеринин областы да каалаган көптүктөр боло ала турганы көрүнүп турат.

Мисалы, ар бир үч бурчтуктун сыртына айлана сызууга болот, демек, ар бир үч бурчтукка ага сырттан сызылган айлананы туура келтирүүгө болот, анда бардык айланалардын көптүгүндө бардык үч бурчтуктардын көптүгү түспөлдөнгөн болот.

Демек, үч бурчтуктардын көптүгүндө функция берилген болот да, анын аныкталуу областы бардык үч бурчтуктардын көптүгү, ал эми маанилеринин областы алардын сыртына сызылган бардык айланалардын көптүгү болот.

Аныкталуу областы да, маанилеринин областы да чыныгы сандардын көптүгү болгон функциялар, чыныгы өзгөрмөнүн чыныгы функциялары деп аталышат. Мындан ары жалаң ушундай функциялар менен иш жүргүзөбүз жана «функция» термини аркылуу жалаң гана ушундай функцияларды түшүнөбүз.

3. Функциянын берилүү жолдору. Аргументтин берилген маанисине туура келген функциянын маанисин табууга мүмкүндүк берүүчү эрежени функциянын берилүү жолу деп айтабыз. Функция түрдүү жолдор менен берилиши мүмкүн.

а) Функциянын берилишинин аналитикалык жолу. Функция формула аркылуу берилсе, аналитикалык түрдө берилди деп айтышат. Бул формулада аргументтин берилген мааниси жана турактуу чоңдуктар менен кандай амалдарды кандай тартипте аткарып, функциянын тиешелүү маанисин табуу көрсөтүлөт. Мисалы, $y=5x^3$;

$$y=\frac{5+\sin x}{\sqrt{x}+1{,}5\lg x};$$

ж. б. функцияны туюнткан формула жөнөкөй жана эптүү болгон учурда ал функцияны окуп үйрөнүүдө, практикада колдонууда өтө чоң баа жеткис курал болуп кызмат кылат. Ал эми мындай формуланы таба албасак же табылса да ал татаал, эптүү эмес болсо, функцияны окуп үйрөнүү үчүн аналитикалык жолдон башка жолдорду колдонуу максатка ылайык келет.

Бир эле функция бир нече формула аркылуу берилген учурлар да кезигет. Мисалы, 1) Машина A дан Bга 9 саатта келди. Ал биринчи 3 саатта 50 км ден жүрдү. Андан кийин 2 саат токтоп турду. Калган жолду 60 км/саат ылдамдык менен өтсө, машина жүргөн жолду жолдо болгон убакыттын функциясы катарында аналитикалык түрдө туюнткула.

$$1)\quad y=\begin{cases} 50\,x, & \text{эгер } 0\leqslant x\leqslant 3 \text{ болсо,}\\ 150 & \text{эгер } 3< x\leqslant 5 \text{ болсо,}\\ 150+60\,(9-x), & \text{эгер } 5< x\leqslant 9 \text{ болсо.}\end{cases}$$

2) $$y=\begin{cases} x^2 & \text{эгер } x\leqslant 0 \text{ болсо,}\\ \cos x+1, & \text{эгер } x>0 \text{ болсо, ж. б.}\end{cases}$$

б) Функциянын берилишинин таблицалык жолу. Аргументтин берилген маанилерине туура келген функциянын тиешелүү маанилери белгилүү тактыкта алдын ала эсептелип коюлган таблица, функциянын таблицалык түрдө берилиши болот.

Мындай таблицаларды алдын ала түзүп коюунун практикада өтө чоң мааниси бар. Аргументтин ошол эле бир маанисине туура келген функциянын маанисин кайра-кайра эсептеп отурбастан, аны бир эле жолу эсептеп, керек болсо колдоно берүү ыңгайлуу, анын үстүнө көп учурда, функциянын маанисин ал берилген формуланын негизинде эсептеп чыгуу кымбатка туруп, машакаттуу, көп убакытты талап кылган жумуш болору белгилүү. Мисалы, тригонометриялык, логарифмдик функциялар ж. б. Таблицалар функциянын тиешелүү сан маанисин табуу үчүн гана керек болбостон, анын негизинде функциянын өзгөрүү мүнөзү, айрым касиеттери жөнүндө корутунду чыгарууга болот.

Жаратылыштын кубулуштарын, техникалык процесстерди математикалык жактан окуп үйрөнүүдө, тиешелүү чоңдуктардын арасындагы функциялык көз карандылыкты көрсөткөн формула табыла элек болсо, бул көз карандылыкты бир канча даражада мүнөздөгөн таблицаны түзүп алуу пайдалуу болот.

Көп учурда функциянын бардык маанилеринин чексиз көп болушу, аларды бүт эсептеп чыгарууга мүмкүндүк бербейт, бул болсо функциянын берилүүсүнүн таблицалык жолунун кемчилдиги болот.

в) Функциянын берилишинин график жолу. Аныктама. $y=f(x)$ функциясынын графиги деп, абсциссалары аргументтин маанилери болгон, ординаталары функциянын тиешелүү маанилери болгон тегиздиктин бардык чекиттеринин көптүгүн айтабыз.

Функциянын графиги чийилсе, ал функция график түрүндө берилди деп айтышат. График көрсөтмөлүү болуп, функциянын касиеттери графиктен даана көрүнөт. Графиги боюнча аргументтин берилген маанисине туура келүүчү функциянын тиешелүү маанисин жакындатып эсептөөгө болот.

Жаратылыштын кубулуштарын, техникалык процесстерди окуп үйрөнүүдө приборлор чийген же башка жол менен түзүлгөн графиктердин ролу чоң болот. Мисалы, Жер титирөөнүн мүнөзүн сейсмографтын чийген графигинин негизинде, жүрөктүн иштөө мүнөзүн анын электрокардиограммасынын (электрокардиограф чийген графиги) негизинде окуп үйрөнүшөт. Ар кандай функциянын графиги болот деп эсептөөгө жарабайт. Мисалы, Дирихленин функциясы деп аталган төмөнкү функциянын графигин чийүүгө мүмкүн эмес.

$$D(x)=\begin{cases}1, \text{ эгер } x \text{ — рационалдык сан болсо,}\\ 0, \text{ эгер } x \text{ — иррационалдык сан болсо.}\end{cases}$$

г) Функциянын оозеки берилиши. Функциянын аналитикалык берилиши табылбаса же табылса да ал татаал, ыңгайсыз болсо, анда функция оозеки берилет. Мисалы, 1) жогоруда келтирилген Дирихленин функциясы, 2) $\pi(n)$ сан функциясы. Бул функция n ден ашпаган натуралдык санга чейинки жөнөкөй сандардын санын туюнтат. Жөнөкөй сандардын аныктамасына, касиеттерине таянып, n дин ар кандай мүмкүн болгон маанилерине ылайык келген $\pi(n)$дин маанисин табууга болот. Мында функция оозеки берилди. Мисалы, $\pi(7)=4$. Мында 7 ден ашпаган жөнөкөй сандар төртөө: 2, 3, 5, 7.

Суроолор

1. Турактуу чоңдук деген эмне?
2. Кандай чоңдукту өзгөрмө чоңдук дейбиз?
3. Функциянын аныктамасын айтып бергиле.
4. Кайсы убакта бир көптүктүн экинчи көптүктө түспөлдөнүшү берилди деп айтышат?
5. Кайсы убакта берилген көптүктө функция берилди деп айтышат?
6. Кайсы убакта функция берилди деп айтышат?
7. Функциянын берилүү жолдору деп эмнени түшүнөбүз?
8. Функциянын берилишинин аналитикалык жолу деп эмнени түшүнөбүз?
9. Функциянын таблицалык берилишинин кандай жетишкен жана жетишпеген жактары бар?
10. Функциянын графиги деп эмнени айтабыз?
11. Функциянын график түрүндө берилишинин кандай артыкчылыктары бар?
12. Функциянын оозеки берилиши жөнүндө эмнелерди айтууга болот?

Көнүгүүлөр

1. Айлананын ичине сызылган туура көп бурчтуктун жактарын чексиз эки эселентүү процессинде, кайсы чоңдуктар турактуу, кайсы чоңдуктар өзгөрмө болушат?

2. Үч бурчтуктун чокусун анын негизине параллель болгон жана ошол чокусу аркылуу өткөн түз сызык боюнча жылдырганда, кайсы чоңдуктар турактуу, кайсылары өзгөрмө болушат?

3. $f(x)=\frac{x^2+\sqrt{x}}{5+2x}$; $f(4)$; $f(2)$; $f(9)$ эсептегиле.

4. Бардык айланалардын жана айланага сырттан сызылган бардык үч бурчтуктардын көптүктөрүн карайлы. Бул жерде бардык айланалардын көптүгүндө функция берилген болобу? Эгер берилсе, анын аныкталуу областын жана маанилеринин областын көрсөткүлө.

5. Бардык томпок төрт бурчтуктардын жана мындай төрт бурчтуктарга ичтен сызылган айланалардын көптүктөрүн карайлы. Бул жерде бардык томпок төрт бурчтуктардын көптүгүндө функция берилди деп айтууга болобу?

6. Дирихле функциясы үчүн $D(\pi)$; $D(\sqrt{2}+3)$; $D(25/17)$; $D(\pi+0{,}5)$ эсептегиле.

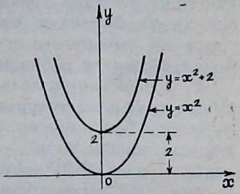
7. $\pi(n)$ сан функциясы үчүн $\pi(10)$; $\pi(23)$; $\pi(35)$; $\pi(57)$ эсептегиле.

8.
$$f(x)=\begin{cases}3-x^2, & \text{эгерде } x\geqslant 0,\\ 2x+1, & \text{эгерде } x<0.\end{cases}$$

$f(2/3)$; $f(-5)$; $f(b^2+1)$; $f(-b^2)$ эсептегиле.

§ 2. ГРАФИКТИ ЖӨНӨКӨЙ ӨЗГӨРТҮП ТҮЗҮҮ

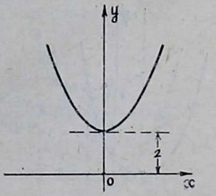
Функциянын графигин өзгөртүп түзүүнүн көп жолу бар. Графикти ар тараптан терең негиздеп, көбүрөөк так түзүү үчүн берилген функциянын касиеттерин алдын ала аналитикалык түрдө негиздеп алышат. Бирок практикада, окуу ишинде графикти түзүп алып, анын негизинде тиешелүү функциянын касиеттерин окуп үйрөнүүнү талап кылган учурлар да аз эмес.



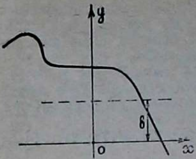
1-чийме

Мурдатан белгилүү болгон функциянын графигин түзүп, аны жөнөкөй өзгөртүп түзүү менен татаал функциянын графигин түзүүнүн төмөнкүдөй методдорун колдонуу көп учурда максатка ылайыктуу болот.

1. *x огун параллель жылдыруу.* Мында $y=x^2+2$ функциясынын графигин түзүүнү карап көрөлү. Бизге $y=x^2$ функциясынын графиги мурунтан белгилүү болсун дейли. $y=x^2$ функциясынын графигин штрих сызыгы менен алдын ала чийип алып, аны алгачкы график деп эсептейли. $y=x^2+2$ жана $y=x^2$ функцияларын өз ара салыштыруу ме-



2-чийме



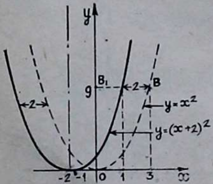
3-чийме

нен берилген функциянын графигинин ординаталары алгачкы графиктин ординаталарынан 2 бирдикке чоң экенин байкайбыз. Демек, $y=x^2+2$ графигин алуу үчүн $y=x^2$ графигин 2 бирдикке өзүнө параллель жогору карай жылдыруу керек (1-чийме).

Алгачкы $y=x^2$ функциясынын графигин жогору карай 2 бирдикке жылдырбастан, x огун төмөн карай 2 бирдикке параллель жылдырсак, берилген $y = x^2 + 2$ функциясынын графигин мурункудан да жеңил түзгөн болобуз, себеби графикти (ийри сызыкты) жылдыргандан көрө x огун (түз сызыкты) жылдыруу алда канча жеңил болот. x огун төмөн карай 2 бирдикке параллель жылдырганда, алгачкы $y=x^2$ функциясынын графигинин бардык ординаталары 2 бирдикке чоңоюп, берилген $y=x^2+2$ функциясынын графиги келип чыгат (2-чийме). Ошентип эгерде, $y=f(x)$ функциясынын графиги мурдатан белгилүү болсо, $y=f(x)+b$ функциясынын графигин төмөнкүдөй жөнөкөй жол менен сызууга болот.

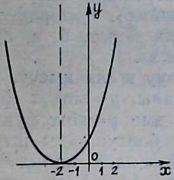
Горизонталь окту штрих сызыгы менен сызып алып, адегенде $y=f(x)$ функциясынын графиги сызылат да, x огу $(-b)$ бирдикке өзүнө параллель жылдырылат, так ушул ок чыныгы x огу болот. Мурунку штрих сызыгы менен сызылган горизонталь окту өчүрүп таштоого болот.

2. *y огун параллель жылдыруу.* $y=(x+2)^2$ функциясынын графигин түзүү керек болсун дейли. Бизге графиги мурдатан белгилүү болгон $y=x^2$ функциясынын графигин штрих сызыгы менен сызып, аны алгачкы график деп атайлы. $y=(x+2)^2$ функциясынын ар бир ординатасы адепки графиктин абсциссасы $x+2$ болгон, б. а. анын абсциссасынан 2 ге чоң болгон абсциссага ээ болгон ординаталарына барабар экенин байкайбыз. Мисалы, $x=1$ болгондо $y=(x+2)^2=9$, б. а. $x=1$ болгондо, y огу боюнча 1 эмес $3^2=9$, б. а. $(1+2)^2$ барабар кесиндисин коюу керек.

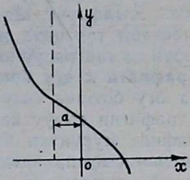


4-чийме

Бул адепки графиктин абсциссасы $x=3$ болгон B чекитинин ординатасы болот, бул ордината берилген функция үчүн $x=1$ абсциссасына ылайык келет. Демек, адепки графиктен берилген функциянын графигин алуу үчүн B чекитин x огу боюнча (—2) ге B_1 чекитине жылдыруу керек, ошондой эле жол менен адепки графиктин бардык чекиттерин x огу боюнча (—2) ге жылдыруу керек. Бул болсо адепки графикти бүт бойдон солго эки бирдикке параллель жылдыруу керек дегенге жатат (4-чийме). Бардык ийри сызыкты 2 бирдикке солго жылдыргандан көрө y огун оңго 2 бирдикке жылдырган оңой болот (5-чийме).



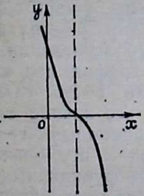
5-чийме



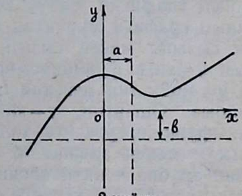
6-чийме

Ошентип, $y=f(x)$ функциясынын графиги мурдатан белгилүү болгондуктан $y=f(x+a)$ функциясынын графигин түзүү үчүн, адегенде y огун штрих сызыгы менен сызып алып, $y=f(x)$ функциясынын графигин түзүшөт. Андан кийин вертикаль окту $(+a)$ бирдикке параллель жылдырышат. Так ушул ок чыныгы y огу болот (6-чийме). Адепки штрих сызыгы менен сызылган вертикаль окту өчүрүп койсо да болот.

y огун $(-x)$ эмес $(+x)$ же кошулган чоңдукка параллель жылдыруу керек болгон учурду да айта кетебиз. Эгерде $y=f(-x+a)$ функциясы берилсе, аны адегенде $y=f[-(x-a)]$ функциясына өзгөртүп түзүү керек. Адепки функция катарында $f(-x)$ кабыл алып, андан



7-чийме

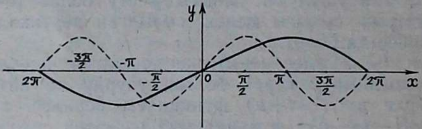


8-чийме

кийин y огун $(+x)$ ке кошулган чоңдукка, б. а. $(-a)$ га параллель жылдыруу керек. Мисалы, $y=(-x+2)^3$ функциясынын графигин түзүү үчүн, аны $y=[-(x-2)]^3=-(x-2)^3$ түрүндө өзгөртүп, адепки функция катарында $y=-x^3$ функциясын кабыл алып, графигин түзүп, y огун (-2) ге параллель жылдыруу керек (7-чийме).

Эгерде $y=f(x+a)+b$ функциясынын графигин түзүү керек болсо, эки окту тең штрих сызыгы менен сызып алып, адепки функциясынын графигин сызып, андан кийин горизонталь окту $(-b)$ га, вертикаль окту $(+a)$ га параллель жылдыруу керек (8-чийме). Окторду жылдырууну тескери тартипте иштесе да болот, б. а. бул операция орун алмаштыруу касиетине ээ.

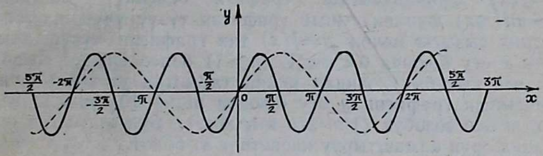
3. Графикти x огу боюнча созуу жана кысуу. а) Графикти x огу боюнча созуу. Мисалы, $y=\sin{}^1/_2x$ функциясынын графигин сызуу керек, ал эми $y=\sin x$ функциясынын графиги мурунтан белгилүү болсун, аны штрих сызыгы менен сызып, адепки график деп кабыл алабыз. $y=\sin x$ функциясынын мезгили $l=2\pi k$ ге караганда $y=\sin{}^1/_2x$ функциясынын мезгили $l=4\pi k$ эки эсе чоң экенин байкайбыз. Ошентип, $y=\sin{}^1/_2x$ функциясынын графиги адепки функция $y=\sin x$ тин графигин x огу боюнча 2 эсе созуу менен алынат, б. а. адепки функциянын графигинин ар бир чекити абсциссасы эки эсе чоңойгон (ординатасы өзгөрбөйт) чекитке өтөт (9-чийме).



9-чийме

б) Графикти x огу боюнча кысуу. Мисалы, $y=\sin 2x$ функциясынын графигин сызуу керек, ал эми $y=\sin x$ функциясынын графиги мурунтан белгилүү болсун дейли. Аны штрих сызыгы менен сызып, адепки график деп кабыл алабыз. $y=\sin x$ функциясынын мезгили $l=2\pi k$ га караганда $y=\sin 2x$ тин мезгили $l=\pi k$ эки эсе кичине экенин байкайбыз. Ошентип, $y=\sin 2x$ функциясынын графиги адепки функция $y=\sin x$ тин графигин x огу боюнча 2 эсе кысуу менен алынат, б. а. адепки функциянын графигинин ар бир чекити абсциссасы 2 эсе кичирейген (ординатасы өзгөрбөйт) чекитке өтөт (10-чийме).

Жалпысынан, эгерде $y=f(x)$ функциясынын графиги мурунтан белгилүү болсо, $y=f(nx)$ функциясынын графигин түзүү үчүн: 1) $0<n<1$ болгондо, $y=f(x)$ функциясынын графигинин ар бир чекити $M(x, y)$ ти $M_1\left(\frac{1}{n}x, y\right)$ абалына жылдыруу, б. а. $y=f(x)$ функциясынын графигин x огу боюнча $1/n$ эсе созуу жетиштүү.



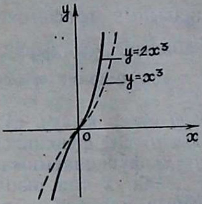
10-чийме

2) $n>1$ болгондо $y=f(x)$ функциясынын графигинин ар бир чекити $M(x, y)$ ти $M_1\left(\frac{x}{n}, y\right)$ абалына жылдыруу, б. а. $y=f(x)$ функциясынын графигин x огу боюнча n эсе кысуу керек.

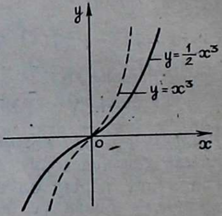
4. *Графикти y огу боюнча созуу жана кысуу.* а) Графикти y огу боюнча созуу. Мисалы, $y=2x^3$ функциясынын графигин түзүү керек, ал эми $y=x^3$ функциясынын графиги мурунтан белгилүү болсун дейли. x тин ошол эле бир маанисинде $y=2x^3$ функциясынын мааниси $y=x^3$ тун маанисинен эки эсе чоң экенин байкайбыз. Демек, $y=2x^3$ функциясынын графигин түзүү үчүн, адегенде $y=x^3$ тун графигин штрих сызыгы менен сызып алып, анын ар бир чекитинин ординатасын 2 эсе чоңойтобуз (абсциссасы өзгөрбөй калат), б. а. $y=x^3$ графигин y огу боюнча эки эсе созобуз (11-чийме). б) Графикти y огу боюнча кысуу.

Мисалы, $y=x^3$ функциясынын графиги белгилүү болгондо $y=\frac{1}{2}x^3$ функциясынын графигин түзүү керек болсун. x тин ошол эле бир маанисинде $y=\frac{1}{2}x^3$ функциясынын мааниси $y=x^3$ тун маанисинен 2 эсе кичине экенин байкайбыз. Демек, $y=\frac{1}{2}x^3$ функциясынын графигин түзүү үчүн, адегенде $y=x^3$ тун графигин штрих сызыгы менен сызып алып, анын ар бир чекитинин ординатасын 2 эсе кичирейтебиз (абсциссасы өзгөрбөйт), б. а. $y=x^3$ тун графигин y огу боюнча 2 эсе кысабыз (12-чийме).

Жалпысынан эгерде $y=f(x)$ функциясынын графиги белгилүү болсо, $y=mf(x)$ функциясынын графигин түзүү үчүн $y=f(x)$ функциясынын графигинин ар бир чекити $P(x, y)$ ти $P_1(x, my)$ абалына жылдыруу, б. а. $m>1$ болгондо, $y=f(x)$ функциясынын графигин y огу боюнча m эсе созуу, ал эми $0<m<1$ болгондо, $y=f(x)$ функциясынын графигин y огу боюнча 1/m эсе кысуу жетиштүү. $y=f(x)$ функциясынын графиги белгилүү болгондо, $y=mf(mx)$ функциясынын графигин түзүү үчүн, адегенде штрих сызыгы менен $y=f(x)$ тин графигин түзүп алып, аны x огу боюнча $0<n<1$, $(n>1)$ болсо $1/n$ эсе созобуз (n эсе кысабыз). Андан кийин табылган $y=f(nx)$ функциясынын графигин y огу боюнча $m>1$ $(0<m<1)$ болсо, m эсе созобуз ($1/m$ эсе кысабыз). Бул иштелген операция орун алмаштыруу касиетине ээ болот.



11-чийме



12-чийме

Суроолор

1. Графикти түзүүдө x огун параллель жылдыруу методунун мааниси эмнеде?
2. Графикти түзүүдө y огун параллель жылдыруу методунун мааниси эмнеде?
3. $y=f(x+a)+b$ функциясынын графигин $y=f(x)$ функциясынын графигин пайдаланып, кантип түзүүгө болот?
4. Графикти түзүүдө x огу боюнча созуу жана кысуу методунун мааниси эмнеде?
5. Графикти түзүүдө y огу боюнча созуу жана кысуу методунун мааниси эмнеде?
6. $y=mf(nx)$ функциясынын графигин $y=f(x)$ функциясынын графигинин негизинде кантип түзүүгө болот?

Көнүгүүлөр

Жөнөкөй өзгөртүп түзүү методун колдонуу менен төмөнкү функциялардын графигин түзгүлө:

9. $y=x-2$.

10. $y=x+3$.

11. $y=x-2$.

12. $y=2^{x-2}+3$.

13. $y=\log(x+3)-2$.

14. $y=x^2-2x+3$ (адегенде квадраттык үч мүчөнүн толук квадратын бөлүп алуу менен).

15. $y=\cos x-3$.

16. $y=\log_2(x+3)+1$.

17. $y=(1-x)^3$.

18. $y=3x^2$.

19. $y=\frac{1}{3}3^{\frac{x}{2}}$.

20. $y=\frac{1}{4}x^2$.

21. $y=1{,}5\log_2 2x$.

22. $y=1{,}5+3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

§ 3. ЭЛЕМЕНТАРДЫК ФУНКЦИЯЛАР

1. Негизги элементардык функциялар. Төмөнкү функциялар негизги элементардык функциялар деп аталат:
1) $y=x^r$ даражалуу функциялар, мында r каалаган чыныгы сан.
2) $y=a^x$ көрсөткүчтүү функция мында $a>0$, $a=1$.
3) $y=\log_x x$ логарифмдүү функция, мында $a>0$, $a\neq 1$.
4) $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$ тригонометриялык функциялар. Азыраак колдонулуучу $y=\sec x$, $y=\operatorname{cosec} x$ функциялар да тригонометриялык функциялар болушат.
5) $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$ жана да $y=\operatorname{arcsec} x$, $y=\operatorname{arccosec} x$ тескери тригонометриялык функциялар.

2. Татаал функциялар. Негизги элементардык функциялардан арифметикалык төрт амалдын жардамы менен көп функцияларды алууга болот. Мисалы, $y=\frac{3\operatorname{arctg} x+\sqrt{x}}{x\cos x-5x^3}$.

Жөнөкөй функциядан башка функцияны алуунун башка жолу да бар. Ал жолду колдонгондо, бир жөнөкөй функциянын аргументи экинчи жөнөкөй функция менен алмаштырылат. Мындай жол менен алынган функция *татаал функция* же *функциянын функциясы*[1] деп аталат. Мисалы, $y=\cos x^3$ татаал функциясы $\cos x$ функциясынан аргумент x ти x^3 функциясы менен алмаштыруудан келип чыккан.

---

[1] Айрым учурда татаал функцияны атоо үчүн функциялардын суперпозициясы деген термин да колдонулат.

Татаал функцияны алуу маселесин жалпы карайлы. $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ функциялары тиешелүү түрдө $И$ жана X көптүктөрүндө аныкталган болсун. Эгерде $u=\varphi(x)$ тин маанилери $И$ көптүгүнө тиешелүү болсо, $u=\varphi(x)$, $y=f(u)$ функциялары $x \in X$ тин ар бир маанисине y тин бир гана маанисин туура келтирет. Адегенде x тин берилген мааниси боюнча $u=\varphi(x)$ ти табышат, андан кийин u нун табылган мааниси боюнча $y=f(u)$ табышат.

y өзгөрмө чоңдугу x өзгөрмө чоңдуктун $x \to u \to y$ схемасы менен түзүлгөн татаал функциясы деп аталат жана $y=f[u(x)]$ түрүндө жазышат, $u=\varphi(x)$ функциясы аралык аргумент деп аталат. Мисалы, $y=a^{\sin x}$ татаал функциясы $y=a^u$, $u=\sin x$ функцияларынан $x \to u \to y$ схемасы боюнча түзүлгөн. $u=\sin x$ функциясы аралык аргумент болуп саналат.

3. Элементардык функцияларды классификациялоо. Элементардык деп аталган математикалык операциялар экиге бөлүнөт: алгебралык операциялар (кошуу, алуу, көбөйтүү, бөлүү, бүтүн көрсөткүчтүү даражага көтөрүү, тамыр чыгаруу). Трансценденттик операциялар (иррационалдык көрсөткүчтүү даражага көтөрүү, логарифмдөө, тригонометриялык жана тескери тригонометриялык операциялар).

Аныктама. Негизги элементардык функциялардан чектүү сандагы арифметикалык амалдарды колдонуу менен жана татаал функцияны пайда кылуу менен алынган функциялар *элементардык функциялар* деп аталат.

Мисалы, $y=\dfrac{\lg \sin x + ax^n}{\operatorname{arctg} x - a^x}$.

Элементардык функция берилген операциянын саны жана аткаруу ирети аргументтин маанисине көз каранды болбоо керек. Биз жогору жакта келтирилген Дирихленин функциясы элементардык функция боло албайт, себеби ал негизги элементардык функциялардан түзүлгөн эмес. $y=n!$ функциясы элементардык функция боло албайт, операциянын саны аргумент n дин маанисине көз каранды, анын үстүнө n чексиз өскөн сайын функциянын тиешелүү маанисин табууга керек болгон операциялардын саны да чексиз өсөт.

Элементардык функциялар алгебралык жана трансценденттик болуп экиге бөлүнөт.

Аныктама. Эгерде көз каранды эмес өзгөрмө чоңдук x менен жана x ке көз каранды болгон аралык туюнтмалар менен алгебралык операциялар гана аткарылган $y=f(x)$ элементардык функция алгебралык элементардык функция деп аталат. Мисалы, 1) $y=x^3-3x+7$;

2) $y=\dfrac{x^5-7}{\sqrt[3]{x}+5}$; 3) $y=\sqrt[5]{(x^4+2x-6)^4}-5x$.

Аныктама. Алгебралык болбогон элементардык функциялар *трансцендenttik элементардык функциялар* деп аталат.
Мисалдар, 1) $y=3\cos(2x-5)-7x^3$; 2) $y=5\mathrm{arc}tgx+l^{3x}-7$; 3) $y=\ln x+x\mathrm{tg}^2x-7$.

$y=x^3\ln 3{,}5-x\sin\dfrac{\pi}{4}+5$ функциясы трансценденттик функция болбостон, $y=ax^3+bx+c$ түрүндөгү алгебралык функция болот, мында a, b, c коэффициенттери чыныгы сандар. Элементардык алгебралык функциялар рационалдык жана иррационалдык болуп экиге бөлүнөт.

Аныктама. Эгерде көз каранды эмес өзгөрмө чоңдуктар менен чектүү сандагы кошуу, кемитүү, көбөйтүү жана бөлүү амалдары аткарылса, анда алгебралык элементардык функция рационалдык функция деп аталат.

Мисалы, 1) $y=5x^4-3x^3+1{,}5$; 2) $y=\dfrac{\sqrt{3}\,x^2-5}{\sqrt[3]{5}-4x}$;

3) $y=\dfrac{x^3\ln 5+4x-5}{x^2-\sqrt{6}}$.

Аныктама. Рационалдык болбогон алгебралык элементардык функциялар *иррационалдык функциялар* деп аталат.
Мисалы, 1) $y=\sqrt{x}+5$; 2) $y=4x^3-5x^2+\sqrt{x}+\sqrt{5}$;

3) $y=\dfrac{\sqrt[3]{3x^2+\sqrt{2}\,x}}{x^3-1}$ ж. б.

Рационалдык функциялар, бүтүн рационалдык жана бөлчөктүү рационалдык болуп экиге бөлүнүшөт.

Аныктама. $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$ түрүндөгү рационалдык функция, бүтүн рационалдык функция деп аталат. Мында n терс эмес бүтүн сан болуп, көп мүчөнүн даражасы деп аталат. a_0 a_1 a_2 ..., a_n коэффициенттери чыныгы сандар болушат жана $a_0\neq0$.

Аныктама. $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-1}+\ldots+b_m}$

түрүндөгү рационалдык функциялар, бөлчөктүү рационалдык функциялар деп аталат. Мында $P(x)$, $Q(x)$ — кыскарбас көп мүчөлөр, $Q(x)\neq0$.

Жогорку айтылгандардын негизинде функциялардын бөлүнүшүн төмөнкүдөй схема менен көрсөтүүгө болот.

Суроолор

1. Негизги элементардык функцияларга кандай функциялар киришет?
2. Татаал функция деп эмнени айтабыз?
3. Элементардык операцияларга кандай математикалык операциялар кирет?
4. Алгебралык операциялар кайсылар болушат?
5. Трансценденттик операцияларга кайсы математикалык операциялар кирет?
6. Элементардык функциялар деп кандай функцияларды айтабыз?
7. Алгебралык элементардык функциянын аныктамасын айтып бергиле.
8. Трансценденттик элементардык функция деп эмнени түшүнөсүңөр?
9. Рационалдык жана иррационалдык функциялардын кандай айырмачылыктары бар?
10. Бүтүн рационалдык жана бөлчөктүү рационалдык функциялардын аныктамаларын айтып бергиле.

Көнүгүүлөр

23. $y=\cos^3 x$ татаал функция кандай негизги элементардык функциялардан жана кандай схема менен түзүлөрүн көрсөткүлө.

24. $y=\log_a\sqrt{\operatorname{tg} x}$ татаал функция кандай негизги элементардык функциялардан жана кандай схема менен түзүлгөн?

25. $u=\sin x$, $y=u^2$ функцияларынан $y=f[u(x)]$ татаал функциясын түзгүлө.

26. $u=\cos x$, $v=\sqrt[3]{u}$, $y=a^v$ функцияларынан $x \to u \to v \to y$ схемасы менен татаал функция түзгүлө.

27. Төмөнкү элементардык функциялардын кайсылары алгебралык, кайсылары трансценденттик функциялар болот:

1) $y=\ln^2 x+3\cos^3\dfrac{x}{2}-5x^2+7$;

2) $y=\sqrt{3}x^2+4+e^{3,5}x^2-5\ln 5,3+7$;

3) $y=\dfrac{a^{x^2+3}+7}{\sqrt{4-x^2}}$; 4) $y=\dfrac{3\cos\sqrt{x}+3,5}{\sqrt[3]{x^2}+4x+10}$?

28. Төмөнкү функциялардын кайсылары рационалдык, кайсылары иррационалдык болушат:

1) $7\sqrt{5}=x^3+x\ln 3+7$;

2) $y=\dfrac{5x^5+7}{\sqrt{9-x^3}}$;

3) $y=\dfrac{5x^3+\sqrt{3}\,x+5}{x^2\sqrt{\ln 3}+7}$;

4) $y=\dfrac{4x^3-\sqrt{3}\,\sin^2\dfrac{2\pi}{5}}{5\sqrt{x}+3}$?

§ 4. ФУНКЦИЯНЫН АНЫКТАЛУУ ЖАНА МААНИЛЕРИНИН ОБЛАСТЫ

Функциянын аныкталуу жана маанилеринин областы деген түшүнүктөргө биз жогор жакта кездешкенбиз. Ошол түшүнүктөргө толук токтолобуз.

Аныктама. Функция берилген маселелердин шартында ал мааниге ээ болгон аргументтин маанилеринин көптүгүн функциянын аныкталуу областы дейбиз.

Мисалы, «Аягы 3 менен бүткөн эки орундуу сандарды тапкыла» деген маселе берилсе, $y=10x+3$ деген функцияга ээ болобуз. Маселенин шартын $1 \leqslant x \leqslant 9$ болгон бүтүн сандар канааттандырат, демек, функциянын аныкталуу областы $x=1, 2, 3, \ldots, 9$ бүтүн сандардын көптүгү болот.

Эгерде функция аналитикалык түрдө берилсе жана аныкталуу областы көрсөтүлбөсө, анын аныкталуу областы үчүн функция туюнтулган аналитикалык туюнтма, чыныгы сандардын көптүгүндө мааниге ээ болгон аргументтин маанилеринин көптүгү алынат жана ал функциянын аныкталуусунун табигый областы деп аталат. «Функциянын аныкталуу областы» дегендин ордуна айрым учурларда «Функциянын берилүү областы», «Функциянын жашоо (бар болуу) областы» деген терминдерди да колдонушат. Функция аналитикалык түрдө берилгенде, анын аныкталуу областын табуу үчүн төмөнкүлөрдү эске алуу максатка ылайык болот.

1. Эгерде берилген функция башка функциялардын үстүнөн арифметикалык амалдар иштөөнүн натыйжасында алынган болсо, анын аныкталуу областын табуу үчүн, ар бир компоненттердин аныкталуу областтарын өз алдынча таап, алардын жалпы бөлүгүн (кесилишин) алуу керек.

Мисалы, $y=2x+\sqrt{x}+\arcsin x$ функциясынын аныкталуу областын тапкыла. $y=2x$ функциясынын аныкталуу областы $(-\infty, +\infty)$ аралыгы, $y=\sqrt{x}$ функциясынын аныкталуу областы $[0, +\infty)$ аралыгы, $y=\arcsin x$ функциясынын аныкталуу областы $[-1, +1]$ кесиндиси болот. Бул үч аралыктын жалпы бөлүгү $[0, +1]$ кесиндиси, берилген функциянын аныкталуу областы болот.

2. Эгер берилген функция $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ функцияларынан түзүлгөн $y=f[\varphi(x)]$ түрүндөгү татаал функция болсо, анын аныкталуу областы $\varphi(x)$ функциясынын аныкталуу областынын ичине кирген жана аралык аргумент $u=\varphi(x)$ тин тиешелүү маанилери $f(u)$ функциясынын аныкталуу областын түзгүдөй болгон x тин бардык маанилеринин көптүгү болот.

Мисал үчүн $y=\lg\sin x$ функциясынын аныкталуу областын табуу керек болсун дейли. Бул татаал функция $u=\sin x$, $y=\lg u$ функцияларынан түзүлгөнү көрүнүп турат. Жалпы алганда $u=\sin x$ функциясынын аныкталуу областы $(-\infty, +\infty)$ аралыгы, маанилеринин областы (аралык аргументтин маанилеринин көптүгү) $[-1, +1]$ кесиндиси, $y=\lg u$ функциясынын аныкталуу областы $(0, +\infty)$ аралыгы болору белгилүү. Анда $0<\sin x\leqslant+1$ болот, демек, берилген функциянын аныкталуу областы

$$2\pi k<x\leqslant\frac{\pi}{2}+2\pi k \quad \text{болот.}$$

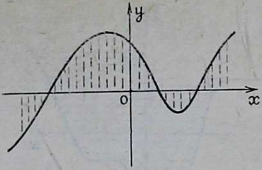
3. Бөлчөк түрүндө берилген функциянын бөлүмү нөлгө барабар болбошу керек.

4. Жуп даражалуу тамырдын ичиндеги туюнтма, терс эмес болушу керек. Мисалы, $y=\sqrt{x^2-4}$ функциясынын аныкталуу областы $|x|\geqslant2$, б. а. $(-\infty, -2]$, $[+2, +\infty)$ аралыктары болот.

5. Иррационалдуу даражага же белгисизди ичине алган даражага көтөрүлүүчү туюнтма, оң мааниде болушу керек.

6. Логарифм белгисинин ичиндеги туюнтма, оң мааниде болушу керек.

7. M^N түрүндөгү туюнтмада даражанын негизи M жана көрсөткүчү — N аргументинин ошол эле бир маанисинде нөлгө айланбоого тийиш.



13-чийме

График түрүндө берилген функциянын аныкталуу областын табуу үчүн графиктин x огундагы проекциясын табуу жетиштүү болот (13-чийме).

Бул функциянын аныкталуу областы бардык чыныгы сандардын көптүгү экени көрүнүп турат.

Аныктама. Функция өзүнүн аныкталуу областында ала турган бардык маанилеринин көптүгү, функциянын маанилеринин областы (өзгөрүү областы) деп аталат. Функциянын маанилеринин областын табуунун көп жолдору бар. Алардын кээ бирлерине токтоло кетели.

1. Берилген функцияны туюнткан теңдемени x ке карата чыгаруу жолу менен функциянын маанилеринин областын табууга болот. Мисалы, $y=\frac{x-3}{x-6}$; $xy—6y=x—3$; $x(y—1)=6y—3$; $x=\frac{6y-3}{y-1}$. Мында $y\neq1$, демек берилген функциянын маанилеринин областы: $—\infty<y<1$, $1<y<$ $<+\infty$ болот.

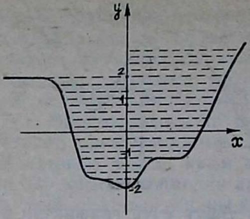
2. Ушул эле функциянын маанилеринин областын башкача жол менен да табууга болот. Берилген функцияны $y=\frac{x-6+3}{x-6}=1+\frac{3}{x-6}$ түрүндө жазып алабыз. $\frac{3}{x-6}$ туюнтмасы 0 дөн башка ар кандай маанини алгандыктан 1 ден башка ар кандай маанини y алат.

3. Функция чексиз области аныкталса, аргумент чексиз чоңойгондо (кичирейгенде) функциянын өзгөрүшүн, үзүлүү чекиттердин аймагында функциянын өзгөрүшүн кароо, функциянын маанилеринин областын табууга жардам берет.

$$\text{Мисалы,}\quad y=\frac{3x+2}{x-2};\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x+2}{x-2}=3.$$

Функциянын үзүлүү чекити болгон $x=2$ чекиттин аймагындагы функциянын өзгөрүшүн карайлы ($x=2$ чекиттеги бир жактуу пределдерин карайлы).

$$\lim_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{3x+2}{x-2}=+\infty;\quad \lim_{\substack{x\to2\\x<2}}\frac{3x+2}{x-2}=-\infty.$$



14-чийме

Мындан берилген функциянын маанилеринин областы $(-\infty, +3)$, $(+3, +\infty)$ аралыктары болору келип чыгат.

4. Эгер функция график түрүндө берилсе, анын маанилеринин областын табуу үчүн графиктин y огунда проекциясын табуу керек. 14-чиймедеги берилген функциянын маанилеринин областы $[-2, +\infty)$ аралыгы экени көрүнүп турат.

Суроолор

1. Функциянын аныкталуу областы деген эмне?
2. Аналитикалык түрдө берилген функциянын аныкталуу областы деп эмнени түшүнүү керек.
3. Башка функциялар менен арифметикалык амалдарды жүргүзүүнүн натыйжасында келип чыккан функциялардын аныкталуу областын кантип табууга болот?
4. Татаал функциянын аныкталуу областы деп эмнени түшүнөбүз?
5. Функциянын аныкталуу областын изилдөөдө дагы эмнелерди көңүлгө алуу керек?
6. Функциянын маанилеринин областы деп эмнени айтабыз?
7. Функциянын маанилеринин областын табуунун кандай жолдору бар?

Көнүгүүлөр

Төмөнкү функциялардын аныкталуу областтарын тапкыла:

29. $y=\dfrac{3x-2}{x^2-3x+2}$.

30. $y=\sqrt{9-x^2}$.

31. $y=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{16-x^2}$.

32. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

33. $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

34. $y=\lg(x^2-4)$.

35. $y=\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$.

36. $y=\sqrt{\mathrm{tg}^2x-(\sqrt{3}+1)\mathrm{tg}x+\sqrt{3}}$.

37. $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

Төмөнкү функциялардын маанилеринин областын тапкыла:

38. $y=x^2-4x+1$.

39. $y=\dfrac{4x+1}{2x-3}$.

40. $y=\dfrac{3x^2+2x-3}{x^2-4}$.

41. $y=\lg(1-2\cos x)$.

42. $y=\sin x+\cos x$.

§ 5. ФУНКЦИЯНЫН ЖУПТУГУ, ТАКТЫГЫ

Функциянын жуптугу жана тактыгы жөнүндөгү түшүнүктөрдү кароодон мурун симметриялуу сан көптүгү түшүнүгүн кийрүүгө туура келет.

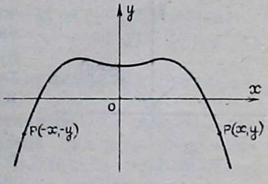
1-аныктама. Эгерде кандай гана болбосун x саны E көптүгүнө тиешелүү болгондо,— x саны да ушул эле көптүккө тиешелүү болсо, E көптүгү координатанын башталышына карата симметриялуу көптүк деп аталат.

Бардык рационалдуу сандардын көптүгү, $[-10,+10]$ кесиндиси, $(-a, a)$ каалаган аралыгы симметриялуу сан көптүктөрүнүн мисалдары болушат.

2-аныктама. Координатанын башталышына карата симметриялуу болгон E көптүгүндө аныкталган $f(x)$ функциясында аргумент x, **E болгон каалаган** мааниси үчүн $f(-x)=f(x)$ барабардыгы аткарылса, $f(x)$ функциясы E көптүгүндө жуп функция деп аталат.

Мисалы, $y=x^4$, $y=x^2+5$, $y=\cos x$ функциялары бүт аныкталуу областында, б. а. $(-\infty, +\infty)$ аралыгында жуп функция болорун түздөн түз текшерип көрүү менен ишенүү кыйын эмес.

Жуп функциянын графиги y огуна карата симметриялуу болот. Чындыгында, эгерде $y=f(x)$ функциясы берилген көптүктө жуп функция болсо жана $P(x,y)$ чекити $y=f(x)$ функциясынын графигинде жатса, (1) барабардыктын негизинде ал чекитке y огуна карата симметриялуу болгон $P_1(-x, y)$ чекити да ошол эле графикте жатат. Ошондуктан, жуп функциянын графигин түзүү маселеси жеңилдейт, бул функциянын графигинин бөлүгүн $x\geqslant 0$ үчүн түзүп, аны y огу боюнча симметриялуу чагылдыруу жетиштүү болот (15-чийме).



15-чийме

3-аныктама. Координатанын башталышына карата симметриялуу болгон E көптүгүндө аныкталган $f(x)$ функциясында аргумент $x \in E$ болгон каалаган мааниси үчүн

$$f(-x)=-f(x) \tag{2}$$

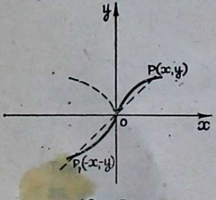
барабардыгы аткарылса, $f(x)$ функциясы E көптүгүндө так функция деп аталат.

Мисалы, $y=x^3$, $y=x^3-2x$, $y=\sin x$ функциялары $(-\infty,+\infty)$ аралыгында, б. а. бүт аныкталуу областында так функция болорун түздөн түз текшерип көрүп, ишенүүгө болот.

Так функциянын графиги координатанын башталышына карата (2) негизинде симметриялуу болот. Эгерде $P(x, y)$ чекити $y=f(x)$ функциясынын графигинде жатса, ал чекитке координатанын башталышына карата симметриялуу болгон $P(-x, -y)$ чекити да ошол эле графикте жатат. Ошондуктан, так функциянын графигин түзүү үчүн, графикти y огунун оң жактагы бөлүгүн түзүп, аны координатанын башталышына симметриялуу түрдө чагылдыруу жетиштүү болот (16-чийме).

Муну төмөнкүдөй башкача иштөөгө да болот: графиктин $x>0$ үчүн сызылган бөлүгүн y огу боюнча симметриялуу чагылдырып, пайда болгон ийри сызыкты x огу боюнча симметриялуу чагылдырышат.

Функциянын баары эле жуп же так функция боло бербейт. Жуп да, так да болушпаган функциялар көп кезигет. Мисалы, $y=3x+5$ жуп да, так да функция болбойт. Чындыгында координатанын башталышына карата симметриялуу болгон, $(-\infty, +\infty)$ аралыгында аныкталганы менен да, $f(-x)=-3x+5$, $-f(x)=-3x-5$ болгондуктан $f(-x)\neq f(x)$, $f(-x)\neq -f(x)$ болот. Бул мисалдан, функциянын координатанын башталышына карата симметриялуу болгон көптүктө аныкталышы, анын жуп же так болушунун жетиштүү эмес, зарыл гана шарты экени келип чыгат. Эгерде функциянын аныкталуу областы координатанын башталышына карата симметриялуу болбосо, анын жуптугу же тактыгы жөнүндө сөз болушу мүмкүн эмес. Мисалы, $f(x)=\log_a x$ функциясынын аныкталуу областы $(0, +\infty)$ аралыгы болгондуктан, анын жуп же тактыгы жөнүндө айтуу маанисиз болот. Бирок, функция координа-



16-чийме

танын башталышына карата симметриялуу болгон көптүктө аныкталса дагы, дайым эле жуп же так боло бербестигин жогору мисалдан көрдүк.

Бул айтылгандардан, функцияны жуп жана тактыкка изилдөө үчүн төмөнкүдөй практикалык эреже келип чыгат.

1) Функциянын аныкталуу областын табуу керек.

2) Эгерде функциянын аныкталуу областы координатанын башталышына карата симметриялуу болсо, аргументтин астындагы белгилерди карама-каршыга өзгөртүшөт, эгерде функция такыр өзгөрбөсө, ал жуп болот, эгерде функциянын модулу өзгөрбөй, астындагы белгиси гана өзгөрсө, ал так болот. Эгер бул эки шарт тең аткарылбаса, функция жуп да, так да болбойт; демек, жуп же так функцияда аргументтин астындагы белгини карама-каршыга өзгөрткөндө, функциянын модулу өзгөрбөй турганын, б. а. $|f(-x)|=|f(x)|$ болорун унутпоо керек.

Мисалы, төмөнкү функцияларды жуптукка жана тактыкка изилдегиле. 1) $f(x)=\frac{1-x^2}{x^4}$. Бул функциянын аныкталуу областы координата башталышына карата симметриялуу болгон $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ эки аралыктан турат жана $f(-x)=\frac{1-(-x)^2}{(-x)^4}=\frac{1-x^2}{x^4}$, б. а. $f(-x)=f(x)$, демек берилген функция жуп функция болот. 2) $f(x)=x^3-\mathrm{tg}x$. Бул функциянын аныкталуу областы $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$ болгон бардык чыныгы сандардын көптүгүнөн, б. а. координатанын башталышына карата симметриялуу болгон $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ аралыгынан жана өз ара бири бирине координатанын башталышына карата симметриялуу болгон $\left(-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi\right)\left(\frac{5}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$ аралыктардын түгөйлөрүнөн турат. Андан тышкары $f(-x)=(-x)^3-\mathrm{tg}(-x)=-x^3+\mathrm{tg}x=-(x^3-\mathrm{tg}x)$, б. а. $f(-x)=-f(x)$. Демек, берилген функция так функция болот.

Жуп жана так функцияга карата төмөнкү теорема жеңил эле далилденет.

Теорема. Эки жуп (так) функциянын суммасы жана айырмасы жуп (так) функция болот. Эки жуп же эки так функциянын көбөйтүндүсү жана тийиндиси жуп функция болот. Жуп жана так функциялардын көбөйтүндүсү жана тийиндиси так функция болот.

Эскертүү. 1) Бул теоремада айтылган компонент функциялар координатанын башталышына карата симметриялуу болгон, ошол эле бир көптүктө карала турганы эске алынат.

2) Тийинди болгон учурда, бөлүүчү болгон функция нөлгө барабар болбошу керек.

Мисалы, теореманы сумма үчүн далилдейли. $F(x)=f(x)+\varphi(x)$ болсун, анда $F(-x)=f(-x)+\varphi(-x)$ болот. $f(x)$ жана $\varphi(x)$ функциялары жуп болгондо, $F(-x)=f(x)+\varphi(x)=F(x)$ ээ болобуз. Ал эми $f(x)$ жана $\varphi(x)$ так болгондо $F(-x)=-f(x)-\varphi(x)=-F(x)$ болот.

Теорема чектүү сандагы кошулуучулардын суммасы үчүн да туура болот. Теореманын калган учурларын далилдөө окуучулардын өзүлөрүнө сунуш кылынат.

Суроолор

1. Координатанын башталышына карата симметриялуу болгон сан көптүгү деп, кандай көптүктү айтабыз?
2. Кандай функция жуп функция деп аталат?
3. Так функциянын аныктамасын айтып бергиле.
4. Функцияны жуп жана тактыкка изилдөө үчүн эмне кылуу керек?
5. Жуп жана так функцияларга карата теореманы айтып бергиле жана бардык учурлар үчүн далилдегиле.

Көнүгүүлөр

Төмөнкү функцияларды жуптукка жана тактыкка изилдегиле:

43. $y=2x^5+x^3-3x$.

44. $y=3x^2-5x^3$.

45. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

46. $y=\dfrac{a^{-x}+a^{x}}{2}$, $a>0$, $a\neq 1$.

47. $y=3\sin x-\operatorname{tg} 2x$.

48. $y=2x^2+\cos x$.

49. $y=3x^2-|x|$.

50. $y=x^5-\dfrac{x^3-x}{\sqrt{|x|+x^2}}$.

51. $y=\text{const}$ функциясы; const турактуу чоңдук.

52. $D(x)=\begin{cases}1; & \text{эгер } x \text{ рационалдык сан болсо,}\\ 0; & \text{эгер } x \text{ иррационалдык сан болсо.}\end{cases}$

$D(x)$ — Дирихленин функциясы.

§ 6. ФУНКЦИЯНЫН МЕЗГИЛДҮҮЛҮГҮ

Эгерде кандайдыр бир окуя же процесс убакыттын ошол эле бир аралыгында дайыма кайталанса, ал *мезгилдүү* деп аталары белгилүү. Мезгилдүү процесстин закон ченемдүүлүгүн туюнткан функция, анын өзүнө гана мүнөздүү болгон өзгөчө касиетке ээ болот, анын мааниси аргументтин өзгөрүшүнүн бирдей аралыгында ошол эле бир тартипте дайыма кайталанат. Тригонометриялык функциялардын ушундай касиетке ээ болуп жана мезгилдүү функциялар деп аталары мектептин математикасынан эле белгилүү. Мезгилдүү функция түшүнүгүнө төмөнкүдөй көбүрөөк так жана жалпы аныктама берилет.

Аныктама. $f(x)$ функциясынын аныкталуу областынан алынган аргумент x тин ар бир мааниси үчүн $x+l$ де функциянын аныкталуу областына киргендей жана $f(x+l)=f(x)$ барабардыгы аткарылгандай, $l\neq 0$ саны бар болсо, $f(x)$ функциясы *мезгилдүү функция* деп аталат жана l саны анын *мезгили* деп аталат.

Бул аныктаманын негизинде, эгерде $f(x)$ функциясынын мезгили l саны болсо, nl жана $-nl$ сандары да анын мезгили боло алат. Мында ($n=1, 2, 3,\ldots$) чындыгында да $f(x+2l)=f[(x+l)+l]=f(x+l)=f(x)$, $f(x+3l)=f[(x+2l)+l]=f(x+2l)=f(x)$ ж. б. Жалпы эле $f(x+nl)=f(x)$. Ушундай эле жол менен $-nl$ саны $f(x)$ функциясынын мезгили болорун далилдөөгө болот. Биз бул ой жүгүртүүлөрдө x саны менен $x+nl$, $x-nl$ сандары да берилген функциянын аныкталуу областына тиешелүү дегенге негиздедик. Биз муну менен $(-\infty, +\infty)$ аралыгында аныкталган функция мезгилдүү болсо, анын чексиз көп мезгили болорун далилдедик. Эгерде бул мезгилдердин ичинен эң кичине оң мезгил бар болсо, аны негизги мезгил (көп учурда жөн эле «мезгили») деп айтышат.

1-мисал. $y=\sin x$ мезгилдүү функция экенин далилдеп, анын мезгилин тапкыла. $l\neq 0$ болгон ар кандай сан үчүн $x+l$ саны бул функциянын аныкталуу областына тиешелүү болот. Себеби анын аныкталуу областы $(-\infty, +\infty)$ аралыгы экени белгилүү. Эми $y=\sin x$ функциясы мезгилдүү экенин далилдөө үчүн аныктаманын негизинде

$$\sin(x+l)=\sin x \tag{1}$$

барабардыгы ар кандай $x\in(-\infty, +\infty)$ үчүн аткарылгандай $l\neq 0$ саны бар экенин көрсөтүү жетиштүү. Ал үчүн

$$\sin(x+l)-\sin x=0 \tag{2}$$

болушу жетиштүү. Муну алуу үчүн

$$2\sin\frac{l}{2}\cos\left(x+\frac{l}{2}\right)=0 \tag{3}$$

барабардыгы x тин бардык маанисинде аткарылгандай $l\neq 0$ санынын бар болушу жетиштүү. x өзгөрмө болгондуктан, анын бардык мааниси үчүн $\cos\left(x+\frac{l}{2}\right)=0$ барабардыгы аткарыла албайт. Демек, (3) барабардык аткарылышы үчүн

$$\sin\frac{l}{2}=0 \tag{4}$$

болушу зарыл жана жетиштүү болот. (4) дөн $\frac{l}{2}=\pi k$ $(k=0, \pm 1, \pm 2...)$ болору келип чыгат.

Анда $l=2\pi k$, $l\neq 0$ болгондуктан $k\neq 0$ болот. Демек, (1) барабардыгы x тин бардык маанисинде аткарылгандай $l=2\pi k$ $(k=\pm 1, \pm 2, \pm 3...)$ саны бар, анда $y=\sin x$ функциясы мезгилдүү жана анын мезгили $l=2\pi k$ болот. $k=1$ болгондогу мезгил 2π, эң кичине оң мезгили болору көрүнүп турат. Демек, $y=\sin x$ функциясынын негизги мезгили $l=2\pi$ саны болот.

2-мисал. $y=\operatorname{tg}x$ функциясынын мезгилдүү экенин далилдеп, анын мезгилин тапкыла.

$y=\operatorname{tg}x$ функциясынын мезгилдүү экенин далилдөө үчүн, биринчиден, x бул функциянын аныкталуу областына тиешелүү болсо, $x+l$ саны да анын аныкталуу областына тиешелүү болгондой, экинчиден,

$$\operatorname{tg}(x+l)=\operatorname{tg}x \tag{1}$$

барабардыгы x тин ар кандай мүмкүн болуучу мааниси үчүн аткарылгандай $l\neq 0$ саны бар экенин көрсөтүү жетиштүү болот. Муну алуу үчүн

$$\operatorname{tg}(x+l)-\operatorname{tg}(x)=0 \tag{2}$$

барабардыгынын аткарылышы жетиштүү. Ал үчүн

$$\operatorname{tg}(x+l)-\operatorname{tg}(x)=\frac{\sin(x+l-x)}{\cos(x+l)\cos x}=\frac{\sin l}{\cos(x+l)\cos x} \tag{3}$$

барабардыктын аткарылышы жетиштүү. (3) барабардыктын, демек, (1) барабардыктын аткарылышы үчүн m дин мүмкүн болуучу ар кандай мааниси үчүн $\cos(x+1)\neq 0$, $\cos x\neq 0$, $\sin l=0$ болгудай $l\neq 0$ санынын бар экенин көрсөтүү зарыл жана жетиштүү. Демек,

$$x+l\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad l=\pi k,\quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

бирок $l \neq 0$ болгондуктан, кийинки барабардыкта $k \neq 0$ болот. Демек, $l=\pi k (k=\pm 1. \pm 2 \cdots)$.

Биз жогоруда көрсөткөн эки шартка жооп бере турган $l=\pi k \neq 0$ саны бар болду. Анда $y=\operatorname{tg} x$ фунциясы мезгилдүү функция жана мезгили $l=\pi k$ болот. $k=1$ болгондо $l=\pi$ мааниси негизги мезгил болот, себеби l дин мааниси k га көз каранды. k өзүнүн эң кичине оң мааниси болгон 1 ге барабар маанини алганда l дин мааниси анын эң кичине оң мааниси болот.

3-мисал. $y=\cos x$ функциясынын мезгилдүү экенин жана негизги мезгили 2π болорун өз алдыңарча далилдегиле.

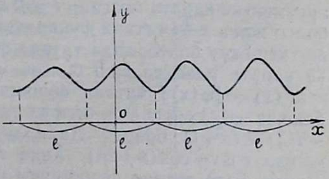
Мезгилдүү функциянын негизги мезгили дайыма эле боло бербейт. Мисал үчүн жогорудагы Дирихленин функциясын карап көрөлү:

$$D(x)=\begin{cases} 1, \text{ эгер } x \text{ рационалдык сан болсо,} \\ 0, \text{ эгер } x \text{ иррационалдык сан болсо,} \end{cases}$$

Мейли l каалаган нөлгө барабар эмес рационалдык сан болсун. Эгер x рационалдык (иррационалдык) сан болсо, $x+l$ да рационалдык (иррационалдык) сан болот. Демек, $D\ (x)$ жана $D(x+l)$ бир убакта 1 ге же 0 гө барабар болот. Анда $D(x)=D(x+l)$.

Ошентип, $D(x)$ функциясы мезгилдүү болуп, мезгили ар кандай $l \neq 0$ рационалдуу сан болот. Эч кандай иррационалдык сан бул функциянын мезгили боло албайт, себеби: x — рационалдык сан болгондо, l — иррационалдык сан болсо, $x+l$ да иррационалдык сан болот. Анда $D(x)=1$, $D(x+l)=0$ болгондуктан, $D(x) \neq \mathrm{D}(x+l)$ болот.

Оң рационалдык сандардын көптүгүндө эң кичинеси жок болгондуктан, Дирихленин функциясынын негизги мезгили болбойт. Эгерде функция мезгилдүү болсо, анын касиетин үйрөнүүнү жана графигин түзүүнү, мезгилине барабар болгон кесиндиде (андай кесиндини бөлүп алууга мүмкүн болгондо) жүргүзүү жетиштүү болот. Анын касиети жана графиги x огу боюнча бүтүн мезгил аралыкка параллель которулуу менен мезгилдүү түрдө кайталанат (17-чийме). Көп учурда айрым жөнөкөй функциянын мезгилдүүлүгүнө карап, андан да татаал функциянын мезгилдүү эке-



17-чийме

нин билүүгө жана анын негизги мезгилин табууга мүмкүн.

1. Эгерде $f(x)$ функциясынын негизги мезгили l болсо, анда $f(x+a)$, $f(nx)$ функциялары да мезгилдүү болушат жана негизги мезгилдери тиешелүү түрдө l жана $\frac{l}{n}$ ге барабар болот. Чындыгында, шарт боюнча $f(x+l)=f(x)$; $x+a$, nx тер менен бирге $x+a+l$, $nx+l$ дер да функциянын аныкталуу областына тиешелүү болсун. Анда мезгилдүү функциянын аныктамасы боюнча $f(x+a)=f(x+a+l)=$ $=f[(x+l)+a]$ жана $f(nx)=f(nx+l)=f\left[n\left(x+\frac{l}{n}\right)\right]$ ге ээ болобуз.
Далилденди.

2. Эгерде $f(x)$ жана $\varphi(x)$ функциялары мезгилдүү функциялар болсо, анда алардын алгебралык суммасы да мезгилдүү функция болот. $f(x)$ жана $\varphi(x)$ функцияларынын тиешелүү түрдө негизги мезгилдери l жана t болсун дейли, анда $F(x)=f(x)\pm\varphi(x)=f(x+l)\pm\varphi(x+t)$ болот. Эгерде $q=ln=tk$ жана $x+q$ функциялардын аныкталуу областына тиешелүү болсо, $F(x)=f(x+q)\pm\varphi(x+q)=F(x+q)$ болот. Демек, $F(x)$ мезгилдүү функция болот жана анын негизги мезгили кошулуучулардын негизги мезгилдеринин эң кичине жалпы бөлүнүүчүсүнө барабар. Мисалы: $f(x)=\sin\frac{x}{4}+\operatorname{tg}\frac{x}{5}$ функциясынын негизги мезгилин табуу керек болсун дейли. $\sin\frac{x}{4}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{5}$ функциялары жогору жактагы 1,2 мисалдардын негизинде мезгилдүү функция болушуп, негизги мезгилдери тиешелүү түрдө $2\pi:\frac{1}{4}=8\pi$; $\pi:\frac{1}{5}=5\pi$ болот. Анда $f(x)$ функциясынын негизги мезгили 40π болот.

3. Эгерде татаал функциянын аралык аргументи негизги аргументке карата мезгили $l\neq0$ болгон мезгилдүү функция болсо жана $x+l$ татаал функциясынын аныкталуу областына тиешелүү болсо, анда татаал функция негизги аргументке карата мезгили $l\neq0$ болгон мезгилдүү функция болот.

$F(x)=f[\varphi(x)]$ татаал функциясы берилди жана шарт боюнча $\varphi(x)=\varphi(x+l)$ болсун дейли. Анда $F(x)=f[\varphi(x+$ $+l)]=F(x+l)$ болот. Далилденди. Мисалы, $F(x)=3^{\cos x}$, мында $\cos x=\cos(x+2\pi)$. Анда $F(x)=3^{\cos(x+2\pi)}=F(x+2\pi)$. Демек, $F(x)$ татаал функциясы негизги мезгили 2π болгон мезгилдүү функция болот.

Суроолор

1. Мезгилдүү функция деп, кандай функцияны айтабыз?

2. Эгерде $f(x)$ функциясынын мезгили $l \neq 0$ саны болсо, анда анын мезгили $nl(n=\pm1, \pm2, \pm)$ саны да боло аларын көрсөткүлө.

3. $y=\sin x$ функциясынын мезгилдүү экенин далилдегиле жана анын мезгилин тапкыла?

4. $y=\operatorname{tg} x$ функциясынын мезгилдүү экенин далилдегиле жана анын мезгилин тапкыла.

5. $y=\operatorname{ctg} x$ функциясынын мезгилдүү экенин далилдегиле жана мезгилди тапкыла.

6. Мезгилдүү функциянын дайыма эле негизги мезгили боло бербестигин көрсөткүлө.

7. Мезгилдүү функциялар, алардын касиеттерин үйрөнүүдө жана графикти чийүүдө кандай ыңгайлуу өзгөчөлүктөргө ээ болот?

8. Эгер $y=f(x)$ мезгилдүү болсо, $f(x+a)$, $f(nx)$ функцияларынын мезгилдүүлүктөрү жөнүндө эмнени айтууга болот?

9. Татаал функциянын мезгилдүүлүгү жөнүндө эмне айтууга болот?

Көнүгүүлөр

Төмөнкү функцияларды мезгилдүүлүккө текшерип, мезгилдүү болсо, негизги мезгилин тапкыла:

53. $y=\cos 2\pi x$.

54. $y=\sin 2x$.

55. $y=\operatorname{tg} x^2$.

56. $y=2\operatorname{tg} x+\sin 2x$.

57. $y=1+\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

58. $y=\cos\dfrac{x}{3}+\operatorname{tg}\dfrac{x}{5}$.

59. $y=\operatorname{tg} x \sin 3x+\operatorname{ctg} 2x$.

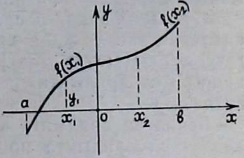
60. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

61. $y=\dfrac{2}{5\operatorname{tg} x}$.

62. $y=\lg\sin 4x$.

§ 7. ФУНКЦИЯНЫН МОНОТОНДУУЛУГУ

1-аныктама. E аралыгынан алынган аргумент x тин каалаган x_1 жана x_2 эки маанилери үчүн $x_1<x_2$ болгондо, $f(x_1)<f(x_2)$ шарты аткарылса, $f(x)$ функциясы бул аралыкта *монотондуу өсүүчү* же жөн эле *өсүүчү функция* деп аталат.



18-чийме

Ошентип, E аралыгынан алынган аргументтин чоң маанисине функциянын да чоң мааниси дайыма туура келсе,

$f(x)$ функциясы бул аралыкта *өсүүчү функция* деп аталат (18-чийме).

Өсүүчү функциянын графиги, аргумент x огу боюнча солдон оңго карай өскөндө, жогору карай көтөрүлөт.

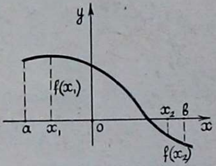
2-аныктама. E аралыгынан алынган аргумент x тин каалаган x_1 жана x_2 эки маанилери үчүн $x_1<x_2$ болгондо, $f(x_1)>f(x_2)$ шарты аткарылса, $f(x)$ функциясы бул аралыкта *монотондуу кемүүчү* же жөн эле *кемүүчү функция* деп аталат.

Ошентип, E аралыгынан алынган аргументтин чоң маанисине функциянын кичине мааниси дайыма туура келсе, $f(x)$ функциясы бул аралыкта *кемүүчү функция* деп аталат (19-чийме).

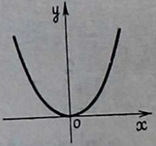
Кемүүчү функциянын графиги аргумент x огу боюнча солдон оңго карай өскөндө, төмөн карай түшөт.

Мисалы, $f(x)=3x^2$ функциясы $(0,+\infty)$ аралыгында өсөрүн, ал эми $(-\infty, 0)$ аралыгында кемий турганын көрсөтөлү.

$x_2\in(0, +\infty)$, $x_1\in(0, +\infty)$ жана $x_1<x_2$ болсун дейли, анда $x_1^2<x_2^2$. Демек, $3x_1^2<3x_2^2$ болот. Анда $f(x_1)<f(x_2)$. Демек, берилген функция $(0, +\infty)$ аралыгында өсүүчү болот. Ушуга эле окшош бул функциянын $(-\infty, 0)$ аралыгында кемүүчү болорун көрсөтүүгө болот (20-чийме).



19-чийме

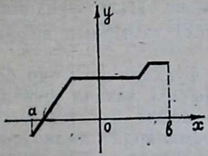


20-чийме

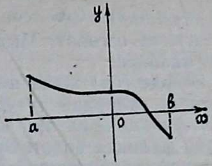
Өсүүчү жана кемүүчү функцияларды төмөнкү аныктаманын жардамы менен жалпылоого болот.

3-аныктама. E аралыгынан алынган аргумент x тин каалаган эки x_1 жана x_2 маанилери үчүн $x_1<x_2$ болгондо, $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ $[f(x_1)\geqslant f(x_2)]$ шарты аткарылса $f(x)$ функциясы бул аралыкта кемибөөчү (өспөөчү) функция деп аталат.

Берилген аралыкта кемибөөчү жана өспөөчү функциялар ушул аралыкта монотондуу функциялар деп аталышат. Кемибөөчү функциянын графиги аргумент өскөндө, өйдө көтөрүлөт же x огуна параллель болот (21-чийме). Өспөөчү функциянын графиги болсо, төмөн түшөт же x огуна параллель болот (22-чийме).



21-чийме



22-чийме

Эскертүү. Бир катар окуу китептеринде биз колдонгон «Кемибөөчү функция», «Өспөөчү функция» терминдеринин ордуна тиешелүү түрдө «Өсүүчү функция», «Кемүүчү функция» терминдерин колдонушат. Ал эми «Өсүүчү функция», «Кемүүчү функция» терминдеринин ордуна тиешелүү түрдө «Тыкыр түрдө өсүүчү функция», «Тыкыр түрдө кемүүчү функция» терминдерин колдонот.

Элементардык жолдорду колдонуп, функцияны монотондуулукка изилдөө, өсүүчү жана кемүүчү функциялардын аныктамаларына түздөн түз негизделет. Демек, барабарсыздыктын касиеттери колдонулат.

Бир катар учурларда иш татаалданып да кетет, ошондой болсо да, бир нече жөнөкөй теоремалар эң жөнөкөй функциянын монотондуулугуна карап, татаалыраак функциянын монотондуулугу жөнүндө корутунду чыгарууга мүмкүндүк берет.

Биз кыскалык үчүн, эгерде $f(x)$ жана $\varphi(x)$ функциялары экөө тең берилген аралыкта өсүүчү же кемүүчү болушса, бир багытта өзгөрүүчү, эгер бирөө өсүүчү, экинчиси кемүүчү функциялар болушса, карама-каршы багытта өзгөрүүчү функциялар деп айтабыз.

1. $f(x)$ жана $f(x)+C$ /мында C — туруктуу чоңдук/ функциялары бир багытта өзгөрөт.

2. $f(x)$ жана $Cf(x)$ функциялары, $C>0$ болсо, бир багытта, $C<0$ болсо, карама-каршы багытта өзгөрөт.

3. Эгерде $f(x)$ жана $\varphi(x)$ функциялары бир багытта өзгөрсө, $f(x)+\varphi(x)$ суммасы ошол эле багытта өзгөрөт.

4. Эгерде $f(x)>0$ жана $\varphi(x)>0$ болушуп бир багытта өзгөрсө, $f(x)\varphi(x)$ көбөйтүндүсү да ошол эле багытта өзгөрөт. Эгерде $f(x)<0$ жана $\varphi(x)<0$ болушуп бир багытта өзгөрсө, $f(x)\varphi(x)$ көбөйтүндүсү карама-каршы багытта өзгөрөт.

5. Эгерде $f(x)$ функциясы кандайдыр бир аралыкта нөлгө айланбай белгиси сакталса, бул аралыкта $f(x)$ жана $\frac{1}{f(x)}$ функциялары карама-каршы багытта өзгөрөт.

6. Эгер $f(x)>0$ болсо, $f(x)$ жана $\sqrt{f(x)}$ функциялары бир багытта өзгөрөт. Мында, $\sqrt{f(x)}$ тамырдын арифметикалык мааниси.

7. Эгерде $f(u)$ жана $u=\varphi(x)$ функциялары бир багытта өзгөрсө, алардан түзүлгөн $f[\varphi(x)]$ татаал функциясы өсүүчү функция, ал эми карама-каршы багытта өзгөрсө, кемүүчү функция болот. Бул теоремалардын далилдөөлөрү жеңил жана бир типте болуп, өсүүчү жана кемүүчү функциялардын аныктамаларын, барабарсыздыктардын жөнөкөй касиеттерин пайдаланууга келтирилет.

Биз мисал үчүн 4-теореманы, $f(x)>0$, $\varphi(x)>0$ болгон учур үчүн далилдөө менен чектелебиз. $f(x)$ жана $\varphi(x)$ экөө тең өсүүчү функциялар болсун, анда $x_2>x_1$ болгондо $f(x_2)>f(x_1)$, $\varphi(x_2)>\varphi(x_1)$ болот. Демек, $f(x_2)\varphi(x_2)>f(x_1)\varphi(x_1)$ болот. Анда $f(x)\varphi(x)$ көбөйтүндүсү өсүүчү функция болот.

$f(x)$ жана $\varphi(x)$ экөө тең кемүүчү функциялар болсун, анда $x_2>x_1$, $f(x_2)<f(x_1)$, $\varphi(x_2)<\varphi(x_1)$ болот. Анда $f(x_2)\varphi(x_2)<f(x_1)\varphi(x_1)$ болот. Демек, $f(x)$ $\varphi(x)$ көбөйтүндүсү кемүүчү функция болот. Бул теореманы $f(x)<0$, $\varphi(x)<0$ болгон учур үчүн ушул сыяктуу эле далилдөөгө болот. Калган теоремаларды жогорку далилдөөгө окшоштуруп далилдөө окуучулардын өздөрүнө сунуш кылынат.

Мисалы, $f(x)=x^3+x$ функциясын монотондуулукка изилдегиле. $y=x^3$, $y=x$ эки функция тең $(-\infty, +\infty)$ аралыгында өсүүчү функциялар болушат. Анда $f(x)=x^3+x$ функциясы да ошол эле аралыкта өсүүчү болот (3-теорема). Бир катар учурларда жуп жана так функцияларды монотондуулукка изилдөөдө төмөнкү теореманын пайдасы тиет.

Теорема. Жуп функция координаталар башталышына симметриялуу болгон аралыктарда карама-каршы багытта өзгөрөт.

Далилдөө. 1) Мейли $f(x)$ функциясы $(0, +\infty)$ аралыгында өсүүчү болсун дейли. x_1 жана x_2 сандары $(-\infty, 0)$ аралыгында каалаган сандар болуп, $x_1<x_2$ болсун, анда $(0, +\infty)$ аралыгында бул сандарга $-x_1$ жана $-x_2$ сандары симметриялуу болушат жана $-x_1>-x_2$ болот. Шарт боюнча $f(x)$ функциясы $(0, +\infty)$ аралыгында өсүүчү болгондуктан,

$$f(-x_1)>f(-x_2) \qquad \text{(I)}$$

болот. Эми эгерде $f(x)$ жуп функция болсо, $f(-x_1)=f(x_1)$, $f(-x_2)=f(x_2)$ болот. Анда (I) барабарсыздык $f(x_1)>f(x_2)$ түрүндө жазыла алат. Мындан $f(x)$ функциясы $(-\infty, 0)$ аралыгында кемүүчү болоору келип чыгат.

Эгер $f(x)$ так функция болсо, $f(-x_1)=-f(x_1)$, $f(-x_2)=-f(x_2)$ болот. Анда (I) барабарсыздык $-f(x_1)>-f(x_2)$ же $f(x_1)<f(x_2)$ түрүндө жазыла алат. Демек, $f(x)$ функциясы $(-\infty, 0)$ аралыгында өсүүчү болору келип чыгат.

Эгер $f(x)$ функциясы $(0, +\infty)$ аралыгында кемүүчү болгондо, $(-\infty, 0)$ аралыгында бул функция жуп болсо, өсүүчү болорун, эгер так функция болсо, кемүүчү болорун жогоркуга окшоштуруп далилдөө окуучуларга сунуш кылынат.

Мисалы, $y=3x^2+5$ функциясы жуп функция, бул функция $(0, +\infty)$ аралыгында өсүүчү болоруна текшерүү менен ишенебиз. Анда жогорку теореманын негизинде бул функция $(-\infty, 0)$ аралыгында кемүүчү болот.

Дифференциалдык эсептөөнүн каражаттарын (туундуну) колдонуу менен функцияны монотондуулукка изилдөө методу жалпы жана негизги метод болот. Ал жалпысынан төмөнкү теоремага негизделет.

Теорема. Эгерде $f(x)$ функциясы E аралыгында үзгүлтүксүз болуп, бул аралыктын ички чекиттеринде туундуга ээ болсо жана $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) шарттары аткарылса, анда бул функция берилген аралыкта өсүүчү (кемүүчү) болот[1].

Мындан функцияны монотондуулукка туундуну колдонуп изилдөө үчүн төмөнкүдөй эреже келип чыгат. 1. Функциянын биринчи туундусун табуу керек. 2. Ал туундунун белгилери турактуу болгон аралыктарды табуу керек. 3. $f'(x)>0$ болгон аралыкта функция өсөт, $f'(x)<0$ болгон аралыкта функция кемийт.

Эскертүү. E аралыгынан алынган чектүү сандагы чекиттерде $f'(x)$ нөлгө айланган учурда да жогорку теорема өз күчүн сактайт.

Мисалы,

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{7}{2}x^2+12x+8$$

функциясын монотондуулукка изилдегиле,
$f'(x)=x^2-7x+12=(x-3)\ (x-4)$. $x>4$ $x<3$ болгондо, б. а. $(-\infty, 3)$, $(4, +\infty)$ аралыктарында $f'(x)>0$ болот, демек,

---

[1] Бул теореманын далилдөөсүн Г. М. Фихтенгольц «Основы математического анализа», том I, М., 1968-жыл, 196-беттен карагыла.

бул аралыктарда функция өсөт. $3<x<4$ болгондо, $f'(x)<0$ болот, б. а. (3; 4) аралыгында функция кемийт.

Ушул эле функцияны элементардык жолдор менен монотондуулукка изилдөө бир кыйла кыйынчылыктарды туудурат.

Суроолор

1. Өсүүчү функциянын аныктамасын айтып бергиле.
2. Кемүүчү функция деп кандай функцияны айтышат?
3. Кемибөөчү функция деп кандай функцияны айтабыз?
4. Өспөөчү функциянын аныктамасы кандайча айтылат?
5. Жалпы эле монотондуу функциялар деп кайсы функцияларды айтабыз?
6. Өсүүчү жана кемүүчү функциялардын графиктери тегиздикте кандайча жайланышышат?
7. Функциянын монотондуулугу жөнүндөгү теоремаларды айтып, далилдеп бергиле.
8. Функциянын жуп же так болушу, ал функцияны монотондуулукка изилдөөнү кандайча жеңилдетет?

Көнүгүүлөр

Түздөн-түз аныктамага негизделүү менен төмөнкү функциялардын өсүү, кемүү аралыктарын тапкыла:

63. $y=3x-2$.

64. $y=-2x+3$.

65. $y=\frac{1}{2}x^2$.

66. $y=x^2+3$.

67. $y=-x^2+2$.

68. $y=x^2-6x+11$.

69. $y=2^x$.

70. $y=\left(\frac{1}{x}\right)^x$.

Монотондуулук жөнүндөгү теоремалардын негизинде төмөнкү функцияларды монотондуулукка изилдегиле:

71. $y=x+4$.

72. $y=x^3+x$.

73. $y=-5x^3$.

74. $y=\sqrt{x}$.

75. $y=\lg x^2$.

76. $y=\frac{1}{x^2}$.

77. $y=3^x\sqrt{x}$.

Графиктерди жөнөкөй өзгөртүп түзүү методун колдонуу менен төмөнкү функциялардын графиктерин түзүп, түзүлгөн график боюнча анын касиеттерин (аныкталуу областы, маанилеринин областы, жуптугу же тактыгы, мезгилдүүлүгүн, монотондуулугун) айтып бергиле:

78. $y=x^2-3$.

79. $y=x^2+2x+1$.

80. $y=x^2-4x+1$.

81. $y=3^{x-4}$.

82. $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1$.

83. $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

§ 8. ФУНКЦИЯНЫН МИНИМУМУ ЖАНА МАКСИМУМУ, ЭҢ ЧОҢ ЖАНА ЭҢ КИЧИНЕ МААНИСИ

1. Функциянын минимуму жана максимуму. Адам баласынын практикалык турмушунда, өндүрүштө, техникада көп учурда колдо бар каражаттарды мүмкүн болушунча билгичтик менен пайдаланып, пайдалуу эффекттин чоң болушуна жана зыяндуу эффекттин аз болушуна кантип жетишүү керектиги жөнүндө маселелерди чыгарууга туура келет. Ушунун негизинде математикага функциянын максимуму жана минимуму деген маанилүү түшүнүктөр киргизилген.

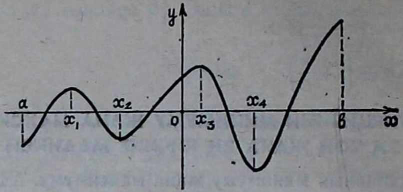
Функция өсүүдөн кемүүгө өткөн чекит максимум чекити, ал эми кемүүдөн өсүүгө өткөн чекит минимум чекити болот.

Максимум чекиттеги функциянын мааниси анын максимум мааниси деп, минимум чекиттеги мааниси минимум мааниси деп аталат. Жалпысынан функциянын максимум, минимум чекиттери анын *экстремум чекиттери* деп, функциянын максимум, минимум маанилери анын *экстремалдык маанилери* деп аталат. Экстремум латындын extremum сөзүнөн алынып, «четки» деген маанини билгизет. Мисалы, $y=3x^2-2$ функциясынын $(-\infty,\ 0)$ аралыгында кемий турганын, $(0,\ +\infty)$ аралыгында өсө турганын көрсөтүүгө болот. Бул функция $x=0$ чекитте кемүүдөн өсүүгө өтөт. Демек, $x=0$ чекит бул функциянын минимум чекити болот.

Функцияны монотондуулукка изилдөөдөгү сыяктуу эле аны экстремумга изилдөөдө негизги метод, ошондой эле күчтүү жана жалпы метод дифференциалдык эсептөөнүн каражатын (туундуну) колдонуу методу болуп саналат. Функциянын экстремумунун төмөнкүдөй көбүрөөк так аныктамасын беребиз.

Аныктама. $f(x)\leqslant f(x_0)\ [f(x)\geqslant f(x_0)]$ шарты бардык чекитинде аткарылгандай, x_0 чекитинин $(x_0-\delta_1\ x_0+\delta)$ аймагы бар болсо, $f(x)$ функциясынын x_0 чекитте максимуму (минимуму) бар болот деп айтышат.

$y = f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесиндисине x_1 жана x_3 чекиттерде максимумга, x_2 жана x_4 чекиттерде минимумга ээ болот (23-чийме).



23-чийме

Функция графигинин жогору көтөрүлүүдөн төмөн түшүүгө өткөн чекитинде максимумга, төмөн түшүүдөн жогору көтөрүлүүгө өткөн чекитинде минимумга ээ болот. Туундуну колдонуп, функцияны экстремумга изилдөө көбүнчө төмөнкү теоремага негизделет.

Теорема. Эгерде x_0 кризистик чекитинин[1] кээ бир $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ аймагында $x - x_0$ болгондо $f'(x) > 0$, $x > x_0$ болгондо $f'(x) < 0$ шарты аткарылса, x_0 чекитте $f(x)$ функциясы максимумга ээ, эгерде $x < x_0$ болгондо $f'(x) < 0$ жана $x > x$ болгондо $f'(x) > 0$ шарты аткарылса, x_0 чекитте $f(x)$ функциясы минимумга ээ болот[2].

Бул теоремадан туундуну колдонуп, функцияны экстремумга изилдөөнүн төмөнкүдөй эрежеси келип чыгат.

1. Функциянын биринчи туундусун табуу керек.
2. $f'(x) = 0$ тендемесинен туундусу нөл болгон чекиттер табылат. Ошондой эле, туундусу жок болгон чекиттер да табылат.

Ошентип, табылган кризистик чекит деп аталган чекиттер экстремум үчүн «шектүү» чекиттер болушат.

3. Төмөнкү таблицада көрсөтүлгөндөй ар бир кризистик чекитти текшерүүдөн өткөрөбүз:

---

[1] Туунду нөлгө айланган же такыр жок болгон чекит.

[2] Далилдөөсүн И. Е. Жак «Дифференциальные исчисления», М., 1960, 358-беттен карагыла.

x y', y	$x<x_0$	$x=x_0$	$x>x_0$
y'	1) $-$ 2) $+$ 3) $-$ 4) $+$	нөл же жок —»— —»— —»—	$+$ $-$ $-$ $+$
y	тиешелүү 1) кемийт 2) өсөт 3) кемийт 4) өсөт	түрдө: минимум чекит максимум чекит кемийт өсөт	 өсөт кемийт кемийт өсөт

Мисалы, $y=\frac{2}{3}x^3+x^2-4x+7$ функциясынын экстремум чекиттерин тапкыла.

1) $y'=2x^2+2x^{-4}=2(x+2((x-1)$.

2) $2(x+2)\ (x-1)=0,\ x_1=-2,\ x_2=1$.

x y', y	$-\infty<x<-2$	$x=-2$	$-2<x<1$	$x=1$	$1<x<+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	өсөт	максимум чекит	кемийт	минимум чекит	өсөт

Бул изилдөөдөн функцияны монотондуулукка жана экстремумга изилдөөнү бир убакта жүргүзүү максатка ылайыктуу экени көрүнүп турат.

2. Функциянын эң чоң жана эң кичине маанилери. Аныктама. Кандайдыр бир аралыктан $f(x)$ функциясынын бардык маанилеринин ичинен эң чоңу (эң кичинеси) бар болсо, аны $f(x)$ функциясынын берилген аралыктагы эң чоң (эң кичине) мааниси деп айтабыз.

$f(x)$ функциясынын $[a, b]$ кесиндисиндеги эң чоң (эң кичине) маанилерин табуу үчүн $f(x)$ функциясынын бул кесиндидеги бардык экстремалдык маанилерин, $f(a)$, $f(b)$ маанилерин табуу керек, бул маанилердин ичинен эң чоңу (эң кичинеси), функциянын $[a, b]$ кесиндисиндеги эң чоң (эң кичине) мааниси болот.

Мисалы, $f(x)=-3x^2+5$ функциясынын $[-3, 5]$ кесиндисиндеги эң чоң жана эң кичине маанисин тапкыла.

Бул фуакция $[-3, 0)$ аралыгында өсөт, $(0, +5]$ аралыгында кемийт. Демек, $x=0$ чекит максимум чекити болот, башка экстремум чекиттери жок. $f(0)=5$; $f(-3)=-22$;

$f(5)=-70$. Демек, бул функциясынын $[-3, 5]$ кесиндисиндеги эң чоң мааниси 5, эң кичине мааниси — 70 болот.

Көп учурда функциянын эң чоң жана эң кичине маанисин табууда бир нече терс эмес сандардын орто арифметикалыгы менен орто геометриялыгынын арасындагы байланышты көрсөткөн төмөнкү теорема колдонулат.

Теорема. $x_1, x_2, ..., x_n$ терс эмес сандарынын орто арифметикалыгы алардын орто геометриялыгынан кичине болбойт, б. а.

$$\frac{x_1+x_2+x_3+...+x_n}{n} \geqslant \sqrt{x_1x_2x_3...x_n} \tag{1}$$

жана мында $x_1=x_2=x_3=...=x_n$ болгондо гана барабардык орундалат.

Далилдөө. (1) барабарсыздыкты $n=2$ болгон учур үчүн, б. а.

$$\frac{x_1+x_2}{2} \geqslant \sqrt{x_1x_2} \tag{2}$$

далилдейбиз.

Ар кандай чыныгы сандын квадраты терс эмес болгондуктан,

$$(x_1-x_2)^2 \geqslant 0 \tag{3}$$

болот, Демек, $x_1^2-2x_1x_2+x_2^2 \geqslant 0$.
Бул барабарсыздыктын эки жагына $4x_1x_2$ кошсок, x_2^1+ $+2x_1x_2+x_2^2 \geqslant 4x_1x_2$ болот. Демек, мындан $x_1+x_2 \geqslant 2\sqrt{x_1x_2}$ келип чыгат. Анда $\frac{x_1+x_2}{2} \geqslant \sqrt{x_1x_2}$ болот. Демек, $n=2$ болгондо, (1) барабарсыздык туура болот. Эми $x_1=x_2$ болсо гана (2) катнашта барабардык орундаларын далилдөө калды.

Эгер $x_1=x_2=x$ болсо, (2) нин эки жагы теңдеш барабар болот: $x=x$. Эгер $x_1 \neq x_2$ болсо, (2) де тыкыр барабарсыздык орун алат. Чындыгында да, бул учурда (3) $(x_1-x_2)^2>$ >0 болот жана андан $\frac{x_1+x_2}{2} > \sqrt{x_1x_2}$ болору келип чыгат. Ошентип, $n=2$ болгондо, теорема толук далилденди.

Эми (1) барабарсыздык кээ бир каалаган n үчүн туура болсо, ал $2n$ үчүн да туура болоорун далилдейбиз. (1) барабарсыздык n үчүн туура болсун деген болжолдун негизинде

$$\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}+...+\frac{x_{2n-1}+x_{2n}}{2}}{2} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{x_3+x_4}{2}\cdot....\frac{x_{2n-1}+x_{2n}}{2}}$$ болот.

Бул барабарсыздыктын оң жагындагы $\frac{x_1+x_2}{2}$, $\frac{x_3+x_4}{2}, \dots,$ $\frac{x_{2n-1}+x_{2n}}{2}$ туюнтмаларды тиешелүү түрдө алардан чоң эмес $\sqrt{x_1x_2}, \sqrt{x_3x_4}, \dots, \sqrt{x_{2n-1}x_{2n}}$ туюнтмалары менен алмаштырсак, күчөтүлгөн $\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+\dots+x_{2n-1}+x_{2n}}{2n} \geqslant$ $\geqslant \sqrt{\sqrt{x_1x_2} \cdot \sqrt{x_3x_4} \dots \sqrt{x_{2n-1}x_{2n}}}$ барабарсыздыгына ээ болобуз.

Демек, $\frac{x_1+x_2+x_3+2_n \dots + x_{2n-1}+x_{2n}}{2n} \geqslant \sqrt[2n]{x_1x_2x_3 \dots x_{2n-1}x_{2n}}$

болот. Далилденди.

Ошентип, биз (1) барабарсыздыктын $n=2, 4, 8, 16, \dots$, б. а. 2 нин каалаган оң бүтүн даражасы үчүн туура экенин далилдедик.

Эгерде n экинин даражасы болбосо, $n+m$ саны экинин даражасы болгудай, б. а. $n+m=2^k$ болгудай, m санын дайыма табууга болот. Анда $\frac{x_1+x_2+\dots+x_n+x_{n+1}+\dots+x_{n+m}}{n+m}$ $\geqslant \sqrt[n+m]{x_1x_2 \dots x_{n+1} \dots x_{n+m}}$ барабарсыздыгына ээ болобуз.

Мейли $x_{n+1}=x_{n+2}=\dots=x_{n+m}=\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}$ болсун. Анда акыркы барабарсыздык

$$\frac{x_1+x_2+\dots+x_n+\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} \cdot \mathrm{m}}{n+m} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[n+m]{x_1x_2 \dots x_n\left(\frac{x_1x_2 \dots x_n}{n}\right)^m}$$ түрүндө жазылат, же

$$\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n+m]{x_1x_2 \dots x_n\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right)^m}$$ болот.

Мындан $\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right)^{n+m} \geqslant x_1x_2 \dots x_n\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right)^m$ барабарсыздыгына ээ болобуз. Бул барабарсыздыктын эки бөлүгүн $\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right)^m$ туюнтмасына бөлүп, $\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right)^n \geqslant x_1x_2 \dots x_n$ ди алабыз. Демек,

$\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}$ болот. Ошентип, (1) барабарсыздык ар кандай натуралдык n үчүн туура болот.

$$x_1=x_2=\dots=x \qquad (4)$$

болсо, барабардык орун алаары көрүнүп турат. Эгер (4) барабардык орун албаса, (1) де тыкыр барабарсыздык орун аларын далилдөө калды. Мейли, мисал үчүн, x_1 жана x_2 эки саны бири бирине барабар эмес болсун, анда

$$\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} = \frac{-\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_1+x_2}{2}+x_3+\dots+x_n}{n} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[n]{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 x_3\dots x_4} \text{ болот.}$$

Мында оң бөлүгүндөгү $\frac{x_1+x_2}{2}$ туюнтмасын, $x_1 \neq x_2$ болгондуктан, андан кичине болгон $\sqrt{x_1x_2}$ туюнтмасы менен алмаштырсак, $\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} > \sqrt[n]{\left(\sqrt{x_1x_2}\right)^2 x_3x_4\dots x_n}$ барабарсыздыгын, б. а. $\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} > \sqrt[n]{x_1x_2x_3\dots x_n}$ барабарсыздыгына ээ болобуз. Теорема толук далилденди. Бул теоремадан өтө маанилүү эки натыйжа келип чыгат.

1-натыйжа. Суммасы турактуу болгон терс эмес сандардын көбөйтүндүсү, бул көбөйүүчүлөр барабар болгондо эң чоң мааниге ээ болот.

Далилдөө. Мейли n терс эмес x_1 $x_2,\dots$ x_n сандарынын суммасы турактуу c санына барабар болсун. Терс эмес сандардын орто арифметикалыгы алардын орто геометриялыгынан кичине эмес болгондуктан, $\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n} \leqslant \frac{c}{n}$ же $\left(\frac{c}{n}\right)^n \geqslant x_1x_2\dots x_n$ болот.

Жогоруда далилденген теорема боюнча $x_1=x_2=\dots=x_n$ болгондо гана барабардык орун алгандыктан, $x_1=x_2=\dots=x_n=\frac{c}{n}$ болгондо гана көбөйтүндү $x_1x_2\dots x_n=\left(\frac{c}{n}\right)^n$ болуп, өзүнүн эң чоң маанисине жетет.

2-натыйжа. Көбөйтүндүсү турактуу болгон терс эмес сандардын суммасы, бардык кошулуучулар барабар болгондо эң кичине маанини алат.

Далилдөө. Мейли n терс эмес x_1 x_2, ..., x_n сандарынын көбөйтүндүсү, q турактуу санына барабар болсун. Анда жогорку теореманын негизинде $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{q}$ же $x_1+x_2+\ldots+x_n \geqslant n\sqrt[n]{q}$ болот. $x_1=x_2=\ldots=x_n$ болгондо гана барабардык орун алгандыктан, $x_1=x_2=\ldots=x_n=\sqrt[n]{q}$ болгондо гана сумма $x_1+x_2+\ldots+x_n=n\sqrt[n]{q}$ болуп, өзүнүн эң кичине маанисин алат.

Мисалдар. 1. $y=2x^3-x^4$ функциясынын эң чоң жана эң кичине маанилерин тапкыла.

$y=x^3$ $(2-x)$ болот. $x=0$, $x=2$ болгондо, функциянын мааниси нөлгө айланат. $x<0$, $x>2$ болгондо $y<0$ жана $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$, функциянын эң кичине мааниси жок. $0<x<2$ болгондо, $y>0$. Ушул аралыкта функциянын эң чоң мааниси бар, ошону издейбиз. Бул максатта берилген функцияны $y=xxx(2-x)=27\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{3}\left(2-x\right)$ түрүндө жазып алабыз.

Берилген функция жана $\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{3}$ $(x-2)$ функциясы x тин ошол эле бир маанисинде эң чоң мааниге ээ болоору көрүнүп турат. $\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+(2-x)=2$ суммасы турактуу сан болгондуктан жана төрт көбөйүүчү тең (0, 2) аралыгында оң болгондуктан, 1-натыйжанын негизинде, $\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{3}(2-x)$ функциясы, демек, берилген функция $\frac{x}{3}=2-x$ шарты аткарылганда, б. а. $x=1,5$ болгондо эң чоң мааниге ээ болот жана ал эң чоң маани $\frac{27}{16}$ ге барабар болот.

2. $y=x^3+\frac{1}{27x}$ функциясынын экстремалдык маанилерин тапкыла. Бул функциянын аныкталуу областы $(-\infty,$

0), $(0, +\infty)$ аралыктары болуп, так функция болгондуктан, аны $(0, +\infty)$ аралыгында кароо жетиштүү. Функцияны $y = x^3 + \frac{1}{81\,x} + \frac{1}{81\,x} + \frac{1}{81\,x}$ түрүндө жазып алалы. Көбөйтүндү $x^3 \cdot \frac{1}{81\,x} \cdot \frac{1}{81\,x} \cdot \frac{1}{81\,x} = \frac{1}{81^3}$ болуп, турактуу болгондуктан 2-натыйжанын негизинде берилген функция $x^3 = \frac{1}{81\,x}$ шарты аткарылганда, б. а. $x = \frac{1}{3}$ болгондо минимумга ($(0, +\infty)$ аралыгындагы эң кичине маанисине) жетет жана функциянын ал минимум мааниси $\frac{4}{27}$ кө барабар болот.

Функция так болгондуктан анын графиги координатанын башталышына карата симметриялуу болот, демек, функция $x = -\frac{1}{3}$ болгондо өзүнүн $-\frac{4}{27}$ максимум маанисине ($(-\infty, 0)$ аралыгындагы эң чоң маанисине) жетет.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y = +\infty, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} y = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} y = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} y = -\infty$$

болгондуктан, жалпы аныкталуу областы боюнча берилген функциянын эң чоң жана эң кичине маанилери жок.

Суроолор

1. Функциянын минимум чекити деп кандай чекитти айтабыз?
2. Функциянын кайсындай чекити максимум чекити деп аталат?
3. Функциянын экстремалдык маанилери деген эмне?
4. Функцияны экстремумга туундуну колдонуу менен изилдөө кандайча жүргүзүлөт?
5. Функциянын эң чоң мааниси деп эмнени айтабыз?
6. Функциянын кандай мааниси анын эң кичине мааниси болот?
7. Функциянын кесиндидеги эң чоң жана эң кичине маанисин кантип табышат?
8. Терс эмес сандардын орто арифметикалыгы менен орто геометриялыгынын арасындагы байланышты көрсөткөн теореманы айтып, далилдөөсүн келтиргиле.
9. Суммасы турактуу болгон терс эмес сандардын көбөйтүндүсүнүн эң чоң мааниси жөнүндөгү ырастоону айтып, далилдегиле.
10. Көбөйтүндүсү турактуу болгон терс эмес сандардын суммасынын эң кичине мааниси жөнүндө кандай ырастоону билесиңер?

Көнүгүүлөр

Төмөнкү функциялардын эң чоң жана эң кичине маанилерин жана бул маанилерди аргумент x тин кайсы маанилеринде аларын тапкыла:

84. $y = x^2 - 2$.

85. $y = -x^2 + 3$.

86. $y=x^2-4x+8$.

87. $y=-x^2+6x-7$.

88. $y=x+\frac{1}{x}\ (x>0)$.

89. 20 санын көбөйтүндүсү эң чоң болгудай кылып, төрт кошулуучунун суммасы түрүндө көрсөткүлө.

90. 64 санын кандай үч сандын көбөйтүндүсү түрүндө көрсөткөндө, ал көбөйүүчүлөрдүн суммасы эң кичине болот?

91. S аянтына ээ болгон тик бурчтуктардын ичинен, эң кичине периметрге ээ болгонун тапкыла?

92. $y=3x^2-2x^3\ (x>0)$ функциясынын эң чоң маанисин тапкыла.

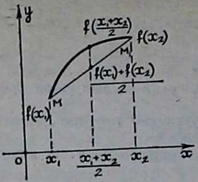
§ 9. ФУНКЦИЯНЫН ГРАФИГИНИН ТОМПОКТУГУ ЖАНА ИЙМЕКТИГИ

Функцияны окуп үйрөнүүдө, айрыкча анын графигинин формасын так билүүдө, функциянын маанилүү касиеттеринин бири, анын графигинин томпоктугу жана иймектиги болуп саналат.

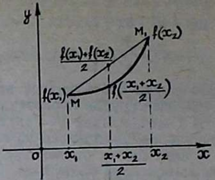
1-аныктама. Эгерде кандайдыр аралыктан алынган аргументтин каалаганы бири бирине барабар эмес x_1 жана x_2 маанилери үчүн $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ барабарсыздыгы орундалса, $y=f(x)$ функциясынын графиги бул аралыкта **томпок ийри сызык** деп аталат.

2-аныктама. Эгерде кандайдыр аралыктан алынган аргументтин каалаган эки барабар эмес x_1 жана x_2 маанилери үчүн $\frac{(f\ x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ барабарсыздыгы аткарылса, $y=f(x)$ функциясынын графиги бул аралыкта иймек ийри сызык деп аталат.

Берилген $y=f(x)$ функциясынын графигин кайсы бир аралыктан карайлы. MM_1— бул графиктин каалаган хордасы, x_1 жана x_2 алардын учтарынын абсциссасы болсун. Хорданын ортосу $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ координаталарына ээ болот. Графиктин жаасынын тиешелүү чекити $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ координаталарына ээ болот. Анда жогорку аныктамалардан функциянын томпок графигинин каалаган хордасынын ортосу, жаанын тиешелүү чекитинен төмөн жата турганы (24-чийме), ал эми функциянын иймек графигинин хордасынын ортосу, жаанын тиешелүү чекитинен жогору жата турганы келип чыгат (25-чийме).



24-чийме

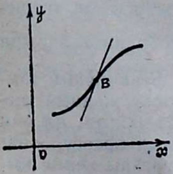


25-чийме

Ошол эле бир $y=f(x)$ ийри сызыгы иймек жана томпок участоктордон тура алат. Эгерде ийри сызык кандайдыр бир B чекитинде жанымaны кесип өтүп, анын бир жагынан экинчи жагына өтсө жана ал чекит ийри сызыктын томпок участогун жанаша жаткан иймек участогунунан бөлүп турса, анда B чекити (ошондой эле бул чекиттин абсциссасы) берилген ийри сызыктын *ийилүү чекити* деп аталат (26-чийме).

Жогорку эки аныктаманын негизинде, ийри сызыкты томпоктукка жана иймектикке изилдегенде, $A=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}-$ $-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ айырмасынын белгисин табышат. Эгер $A>0$ болсо, ийри сызык берилген аралыкта иймек болот. Эгер $A<0$ болсо, ийри сызык берилген аралыкта томпок болот.

Мисалы, $y=x^3$ функциясынын графигин томпоктукка жана иймектикке изилдегиле. $A=\frac{x_1^3+x_2^3}{2}-\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^3=$ $=\frac{4x_1^3+4x_2^3-x_1^3-3x_1^2x_2-3x_1x_2^2-x_2^3}{8}=\frac{3(x_1-x_2)^2(x_1+x_2)}{2}$. Мында $x_1\neq x_2$, $x_1>0$, $x_2>0$ болгондо, б. а. $(0, +\infty)$ аралыгында $A>0$ болот, демек, бул аралыкта $y=x^3$ функциясынын графиги иймек болот. $x_1<0$, $x_2<0$ болгондо, б. а. $(-\infty, 0)$ аралыгында $A<0$ болот, анда бул аралыкта берилген функциянын графиги томпок болот. $(0; 0)$ чекити ийилүү чекити болору көрүнүп турат.



26-чийме

Функцияны максимум жана минимумга изилдөө сыяктуу эле функциянын графиги томпоктукка жана иймектикке изилдөөдө, анын ийилүү чекитин табууда, жалпы жана негизги метод дифференциалдык эсептөөнүн каражаттарын (туундуну) колдонуу болуп саналат. Туундуну колдонуу менен функцияны томпоктукка жана иймектикке изилдөө, анын ийилүү чекитин табуу төмөнкү эреже менен жүргүзүлөт[1].

1. Ийилүү чекиттеринин болушу шектүү болгон чекиттерди табуу керек, ал үчүн: а) $f(x)$ функциясынын 2-туундусун жана $f''(x)=0$ теңдемесинин чыныгы тамырларын табуу керек. б) 2-туундусу болбогон чекиттерди табуу керек.

2. Ийилүү чекиттеринин болушу шектүү болгон чекиттер аркылуу х өткөндө, $f''(x)$ туундусунун белгисинин алмашуусун изилдөө керек.

Эгерде x ийилүү чекит болууга шектүү болгон x_0 чекити аркылуу өткөндө, 2-туунду белгисин өзгөртсө, $x=x_0$ чекити берилген ийри сызыктын ийилүү чекити болот. Мындай болбогондо бул чекит ийри сызыктын ийилүү чекити болбойт. x тин $f''(x)>0$ болгон маанилеринде $y=f(x)$ функциясы иймек болот, $f''(x)<0$ болгон маанилеринде функция томпок болот. Мисалы, $y=x^3-6x^2+7$ функциясын томпоктукка, иймектикке изилдегиле, ийилүү чекитин тапкыла. $y'=3x^2-12x$; $y''=6x-12$, $6x-12=0$, $x=2$. Ийилүү чекит болууга шектүү болгон чекит $x=2$ чекити болот. $x<2$ болгондо, $y''<0$, $x>2$ болгондо $y''>0$. Демек, $x<2$ болгондо функция томпок, $x>2$ болгондо, функция иймек болот жана $x=2$ чекити ийилүү чекити болот. Бир катар учурда функцияны жуп жана тактыгы менен томпоктук жана иймектигин байланыштырган төмөнкү теоремалар пайдалуу болот.

1-теорема. Эгерде $y=f(x)$ функциясы жуп функция болсо жана $(0, a)$ аралыгында томпок (иймек) болсо, ага симметриялуу болгон $(-a, 0)$ аралыгында да томпок (иймек) болот.

Далилдөө. $y=f(x)$ жуп функциясы $(0, a)$ аралыгында томпок болсо, анда $(-a, 0)$ аралыгында томпок болорун далилдейбиз. $x_1 \neq x_2$ болуп, x_1 жана x_2 $(-a, 0)$ аралыгынын каалаган чекиттери болсун дейли. Анда $-x_1 \neq -x_2$ болот жана алар $(0, a)$ аралыгынын тиешелүү чекиттери болот. Шарт боюнча $\frac{f(-x_1)+f(-x_2)}{2} < f\left(\frac{-x_1-x_2}{2}\right)$ болот. $f(x)$ жуп функция болгондуктан, мындан $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} <$

---

[1] Бул эреженин негиздөөсүн, мисалы, И. М. Уваренков, М. З. Маллер «Курс математического анализа», М., 1966. 381—387-беттерди карагыла. Бул жерде жана мындан ары кыскалык үчүн «Функциянын графиги иймек, томпок» дегендин ордуна функция иймек, томпок деп айтабыз.

$<f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ барабарсыздыгына ээ болобуз. Демек, аныктаманын негизинде берилген функциянын (—a, 0) аралыгында томпок болот. Ушуга эле окшош берилген функциянын (0, a) аралыгында иймек болгон учурдагысын далилдөөгө болот.

2-теорема. Эгерде $y=f(x)$ так функциясы (0, a) аралыгында томпок (иймек) болсо, (—a, 0) аралыгында иймек (томпок) болот.

Далилдөө. $y=f(x)$ так функциясы (0, a) аралыгында томпок болсун, анда бул функция (—a, 0) аралыгында иймек болоорун далилдейбиз. x_1 жана x_2 лер (—a, 0) аралыгынын каалаган ар түрдүү чекиттери болсун, анда $-x_1 \neq -x_2$ болот жана алар (0, a) аралыгынын тиешелүү чекиттери болушат. Шарт боюнча $\frac{f(-x_1)+f(-x_2)}{2}<$ $<f\left(\frac{-x_1-x_2}{2}\right)$. Мындан берилген функция так болгондуктан $-\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ келип чыгат, анда $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>$ $>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ барабарсыздыкка ээ болобуз. Демек $y=f(x)$ функциясы аныктама боюнча (—a, 0) аралыгында иймек болот. Берилген функция (0, a) аралыгында иймек болгон учур үчүн теорема жеңил эле далилденет.

Суроолор

1. Кандай ийри сызык томпок деп аталат?
2. Кандай ийри сызыкты иймек ийри сызык деп айтабыз?
3. Томпок жана иймек ийри сызыктардын каалаган хордасы, алардын тиешелүү жааларына карата кандай жайланышат?
4. Кандай чекитти ийри сызыктын ийилүү чекити деп айтабыз?
5. 2-туундуну колдонуп, функцияны томпоктукка жана иймектикке изилдөөнү; анын ийилүү чекитин табууну кандайча ишке ашырууга болот?
6. Функциянын жуп жана тактыгы менен анын томпок жана иймектигинин байланышын көрсөткөн теоремаларды айткыла жана далилдегиле.

Көнүгүүлөр

Төмөнкү функцияларды томпоктукка, иймектикке изилдегиле жана ийилүү чекитин тапкыла:

93. $y=3x^2$.

94. $y=-2x^2$.

95. $y=2x^2-3$.

96. $y=-x^2-2$.

97. $y=2x^3$.

98. $y=-x^3$.

99. $y=x^2-5x+6$.

100. $y=2x^3-24x^2+5$.

101. $y=2^x$.

102. $y=\log_3 x$.

§ 10. ФУНКЦИЯНЫН ЧЕКТЕЛГЕНДИГИ ЖАНА ЧЕКТЕЛБЕГЕНДИГИ

Функцияны изилдөөдө жана анын графигин түзүүдө функциянын чектелгендиги жана чектелбегендиги жөнүндөгү түшүнүктөр да маанилүү болуп эсептелет.

Аныктама. $y=f(x)$ функциясы аныкталган E аралыгынын ар бир x чекити үчүн

$$|f(x| \leqslant M \qquad (1)$$

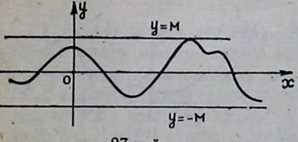
шарты аткарылгандай $M>0$ саны бар болсо, берилген функция E аралыгында чектелген деп аталат.

Кесиндиде, аралыкта ж. б. чектелген функциялар жөнүндө айтууга болот. Эгер функция $(-\infty, +\infty)$ аралыгында чектелген болсо, функция бүт сан огунда чектелген деп же жөн эле чектелген функция деп аташат.

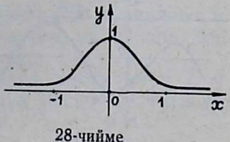
(1) барабарсыздык $-M \leqslant f(x) \leqslant M$ барабарсыздыктарына тең күчтүү болгондуктан, $f(x)$ функциясынын E аралыгында чектелиши, геометриялык жактан $y=f(x)$ функциясынын графиги $y=+M$ жана $y=-M$ сызыктары менен чектелген тилкеде жатат дегенди билгизет (27-чийме).

Мисалдар. 1. $f(x)=2\sin x+3\cos x$.
$|f(x)| \leqslant 2|\sin x|+3|\cos x| \leqslant 5$. $(M=5)$. Демек, бул функция бардык сан огунда чектелген функция болот.

2. $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$. $x\in(-\infty, +\infty)$ бардык маанилерде $1+x^2 \geqslant 1$ болгондуктан, $|f(x)| \leqslant 1$ болот, $(M=1)$. Демек, $f(x)$ чектелген функция. Бул функциянын графиги $y=+1$ жана $y=-1$ (ал гана эмес $y=0$, $y=1$) сызыктары менен чектелген тилкеде жатат (28-чийме).



27-чийме



28-чийме

(1) барабарсыздык $f(x)$ функциясы аныкталган E аралыгын бардык x чекити үчүн аткарылгандай, $M>0$ бар болбосо, $y=f(x)$ функциясы E аралыгында чектелбеген деп аташат, б. а. кандай гана $+M>0$ саны берилбесин, $|f(x_1)|>M$ барабарсыздыгы аткарылгандай аргумент x тин $x_1\in E$ мааниси бар болсо, $y=f(x)$ функциясы E аралыгында *чектелбеген функция* деп аталат.

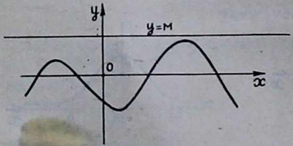
Чектелбеген функция үчүн анын графиги бүт бойдон жата алгыдай $-M<y<+M$ тилкесин табууга болбойт.

Мисалы, $f(x)=2x^3$ бардык сан огунда чектелбеген болот, себеби кандай гана $M>0$ саны үчүн $|x|>\sqrt[3]{\frac{M}{2}}$ болгондо, $|f(x)|>M$ болот. Ошол эле бир функция бир аралыкта чектелбеген болсо, башка бир аралыкта чектелген болушу мүмкүн. Жогорку мисалдагы функция бардык сан огунда чектелбеген болгону менен ар кандай чектүү (a, b) аралыгында чектелген болот, себеби $|a|>|b|$ болсо, $|f(x)|<2|a^3|$ болот. Эгер $|a|<|b|$ болсо, $|f(x)|<2|b^3|$ болот. Жалпысынан, чектелбеген функция жогор жактан же төмөн жактан чектелген болушу мүмкүн.

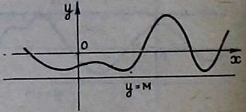
Аныктама. Эгерде функция аныкталган E аралыгынын ар бир x чекити үчүн $f(x)\leqslant M$ ($f(x)\geqslant M$) барабарсыздыгы аткарылгандай, $M>0$ саны бар болсо, анда $y=f(x)$ функциясы E аралыгында жогор жактан (төмөн жактан) чектелген деп аталат.

Е аралыгында жогор жактан (төмөн жактан) чектелген функциянын абсцисса x тин E аралыгынан алынган бардык маанилерине туура келген графиги $y=M$ түз сызыгынын төмөн жагынан (жогор жагынан) орун алат (29, 30-чиймелер).

Мисалдар. 1. $f(x)=\frac{1}{x^2}$ функциясы бардык сан огунда жогор жактан чектелген, себеби, $x\in(-\infty, +\infty)$ бардык маанисинде $-x^2\leqslant 0$ болот. 2. $f(x)=(x^2+3)$ функциясы бардык сан огунда төмөн жактан чектелген, себеби, $x\in(-\infty,$



29-чийме



30-чийме

$+\infty)$ бардык маанисинде $x^2+3\geqslant 3$ болот. Эгерде функция кандайдыр бир аралыкта жогор жактан да жана төмөн жактан да чектелсе, анда берилген функция бул аралыкта жалпы эле чектелген функция болорун көрүү кыйын эмес.

Суроолор

1. Чектелген функциянын аныктамасын айтып бергиле.
2. Чектелбеген функция деп кандай функцияны айтабыз?
3. Чектелген жана чектелбеген функциянын графиктери тегиздикте кандай жайланышат?
4. Кандай функцияны жогор жактан чектелген функция деп айтабыз?
5. Төмөн жактан чектелген функциянын аныктамасын айтып бергиле.
6. Жогор жактан жана төмөн жактан чектелген функциялардын графиктери тегиздикте кандай жайланышышат?

Көнүгүүлөр

103. $f(x)=\frac{1}{x^2}$ функциясы өзүнүн аныкталуу областында төмөн жактан чектелерин көрсөткүлө.

104. $f(x)=\frac{1}{x}$ функциясы $(-\infty,\ 0)$ аралыгында жогор жактан чектелерин көрсөткүлө.

105. $f(x)=\frac{2}{2+x^2}$ функциясынын $(-\infty,\ +\infty)$ аралыгында чектелгендигин көрсөткүлө.

106. $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$ функциясынын $(-\infty,\ +\infty)$ аралыгында чектелгендигин көрсөткүлө.

107. $f(x)=\cos x+5$ функциясынын өзүнүн аныкталуу областында чектелерин көрсөткүлө.

108. $f(x)=x^2+4$ функциясы $(-\infty,\ +\infty)$ аралыгында чектелбеген функция экендигин көрсөткүлө.

109. $f(x)=x^2-6x+13$ функциясы $(-\infty,\ +\infty)$ аралыгында төмөн жактан чектелерин көрсөткүлө.

§ 11. ФУНКЦИЯНЫН НӨЛДӨРҮ, БЕЛГИЛЕРИНИН ТУРАКТУУ АРАЛЫКТАРЫ

1. Функциянын нөлдөрү. Аныктама. Фунциянын маанисин нөлгө айландырган аргументтин маанилери, берилген функциянын нөлдөрү деп аталат.

$y=f(x)$ функциясынын нөлдөрүн табуу үчүн $f(x)=0$ теңдемесин чыгаруу керек. Ал үчүн теңдемени чыгаруунун тиешелүү теориялары колдонулат.

Мисалы, $f(x)=2x^2-8x+6$ функциясынын тамырлары $x_1=+1$, $x_2=3$ болорун $2x^2-8x+6=0$ квадраттык теңдемесин чыгаруу менен биле алабыз.

Функциянын нөлү функцияны изилдөөдө, анын графигин түзүүдө көп колдонулат. Алып айтсак, функциянын экстремум жана ийилүү чекиттерин табууда, анын шектүү чекиттерин табууга, б. а. тиешелүү түрдө функциянын биринчи жана экинчи туундулары нөлгө айланган чекиттерин табууга туура келет. Функциянын биринчи жана экинчи туундуларынын өзүлөрү да функция болгондуктан, биз бул жерде функциянын нөлдөрүн табууга тийиш болобуз.

Графикте функциянын нөлдөрү графиктин x огун кесип өткөн чекиттердин абсциссалары болушат. Албетте, бардык эле функциянын нөлдөрү боло бербейт. Мисалы, $(fx)=\frac{3}{x^2-4}$ функциясынын нөлү жок, б. а. бул функциянын мааниси аргументтин эч бир маанисинде нөлгө айланбайт.

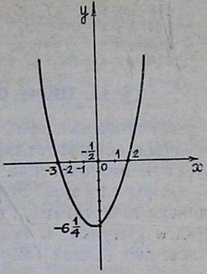
Кээде «функциянын нөлү» деген терминдин ордуна «функциянын тамыры» деген терминди да пайдаланышат. «Теңдеменин тамыры» деген термин менен чаташтырбоо үчүн бул жерде дайыма «функциянын нөлү» терминин колдонуу максатка ылайыктуу болот.

2. Функциянын белгилеринин туруктуу аралыктары. Аныктама. Эгерде кээ бир аралыктан алынган аргументтин бардык маанилеринде, функциянын маанилери бирдей белгиге (оң же терс) ээ болсо, берилген аралык функциянын белгисинин *туруктуу аралыгы* деп аталат.

Функциянын белгисинин туруктуу аралыктарын табуу үчүн, көп учурларда функция берилген аналитикалык туюнтманы көбөйтүүчүлөргө ажыратышат жана ар бир көбөйтүүчүнүн белгисин табышат (көбүнчө барабарсыздыктын жана үзгүлтүксүз функциянын касиеттерин колдонуу менен) жана көбөйтүндүнүн төмөнкү элементардык касиети колдонулат. Эгерде бардык көбөйтүүчүлөр нөлдөн айырмалуу болсо, терс көбөйтүүчүлөрдүн саны жуп болсо, көбөйтүндү оң болот, так болсо терс болот.

Мисалы, $y=x^2+x-6$ функциясынын белгилеринин туруктуу аралыгын табуу керек болсун. $y=(x+3)\ (x-2)$ көбөйтүндүсү түрүндө жазып алгандан кийин, $x<-3$ жана $x>2$ болгондо, $y>0$ экенин, $-3<x<2$ болгондо, $y>0$ болорун табуу кыйын эмес.

Көбөйтүүчүлөргө ажыратуу кыйын болгон учурда башка жолдорду, функциянын башка касиеттерин колдонуу керек. Мисалы, каралып жаткан аралыкта функциянын эң чоң мааниси бар болсо жана ал терс болсо, анда берилген функция бүт бул аралыкта терс болот деген корутунду келип чыгат.



31-чийме

Функциянын белгисинин турактуу аралыгын табуу функцияны маанилүү касиеттерге изилдөөдө кеңири колдонулат. Функциянын монотондуулук жана томпоктук, иймектик аралыгын табуу берилген функциянын биринчи жана экинчи туундулары деп аталган башка бир функциялардын белгилеринин турактуу аралыктарын табууга келтирилет. Эгерде берилген аралыкта функция жалаң оң болсо, анда анын графиги бул аралыкта x огунун үстү жагында жатат, эгерде каралып жаткан аралыкта функция жалаң терс болсо, анын графиги бул аралыкта x огунун асты жагында жатат. Мисалга жогоруда каралган $y=x^2+x-6$ функциясынын графигин көрөлү (31-чийме).

Параболанын чокусу $\left(-\frac{1}{2},\ -6\frac{1}{4}\right)$ чекити болот. Парабола координата октору менен $(-3,\ 0)$, $(2,\ 0)$, $(0,\ -6)$ кесилишет. Функция $(-\infty,\ -3)$, $(2,\ +\infty)$ аралыгында оң болору, $(-3,\ 2)$ аралыгында терс болору графиктен көрүнүп турат.

Суроолор

1. Аргументтин кандай маанисин функциянын нөлү деп айтабыз?
2. Функциянын нөлүн кантип табууга болот?
3. Функциянын нөлү графикте кандай жайланышат?
4. Функциянын нөлүн табуу кандай колдонулат?
5. Функциянын белгилеринин турактуу аралыгы деп, кандай аралыкты айтабыз?
6. Функциянын белгилеринин турактуу аралыгын кантип табууга болот?
7. Функциянын белгилеринин турактуу аралыктарын табуу кайда колдонулат?
8. Белгилери турактуу аралыкта функциянын графиги кандай жайланышат?

Көнүгүүлөр

Төмөнкү функциялардын нөлдөрүн жана белгилеринин турактуу аралыктарын тапкыла:

110. $y=3x^2$.

111. $y=2x^2-8$.

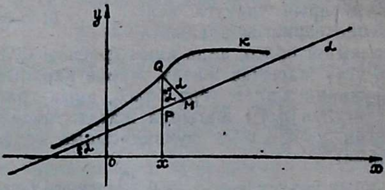
112. $y=-x^2+9$.

113. $y=x^3$.
114. $y=x^2-7x+12$.
115. $y=-x^2+5x-6$.
116. $y=x^4-5x+4$.

§ 12. ИЙРИ СЫЗЫКТЫН АСИМПТОТАЛАРЫ

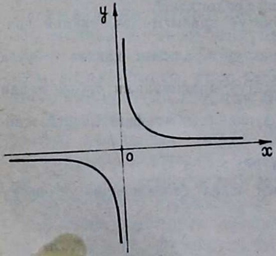
Функциянын графигин бир кыйла так түзүүдө, ийри сызыктын асимптоталары деп аталган түз сызыктарды билүүнүн мааниси чоң.

Аныктама. Эгерде Q чекити K ийри сызыгы боюнча чексиз алыстаганда, андан L түз сызыгына чейинки аралык нөлгө умтулса, L түз сызыгы K ийри сызыгынын асимптотасы деп аталат (32-чийме).



32-чийме

Эки түрдөгү асимптоталар кезигет: вертикалдык жана жантык асимптоталар. Жантык асимптоталардын жеке учуру болгон горизонталдык деп аталган асимптоталар да көп кезигет. Мисалы, x огу жана y огу ($y=0$, $x=0$ түз сызыктары) $y=\frac{1}{x}$ ийри сызыгынын асимптоталары болору көрүнүп турат (33-чийме).



33-чийме

x огу горизонталь, y огу вертикаль асимптота болот.

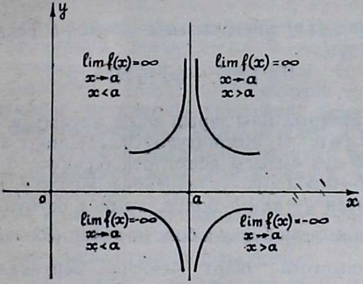
1. Вертикаль асимптоталар. $x=a$ чекитинде $f(x)$ функциясынын бир жактуу пределдеринин жок дегенде бирөө чексизге барабар болсун, б. а.

$$\lim_{\substack{x\to a\\x>0}} f(x)=\pm\infty; \qquad (1)$$

$$\lim_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)=\pm\infty$$

шарттарынын жок дегенде бири аткарылсын дейли. Анда x тин маанисинин a га чексиз жакындоо процессинде $y=f(x)$ ийри сызыгынын тиешелүү чекити $Q\ (x,\ y)$ чексизге алыстайт жана андан $x=a$ түз сызыгына чейинки аралык нөлгө умтулат. Демек жогорку аныктаманын негизинде $x=a$ түз сызыгы $y=f(x)$ ийри сызыгынын асимптотасы болот. Тескерисинче эгерде $x=a$ түз сызыгы $y=f(x)$ ийри сызыгынын асимптотасы болсо, (1) шарттын жок дегенде бири аткарылат. $y=a$ түрүндөгү асимптоталар y огуна параллель болушат жана вертикаль асимптоталар деп аталышат.

$x=a$ чекитинин кээ бир аймагында монотондуу болгон $y=f(x)$ функциясы үчүн (1) шарт аткарылганда, анын графигинин жайланышуу учурларын 34-чийме менен мүнөздөөгө болот.

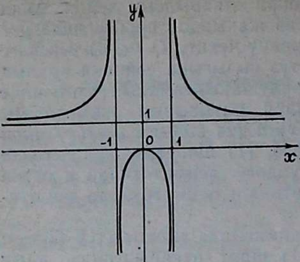


34-чийме

$y=f(x)$ ийри сызыгынын вертикаль асимптоталарын издөө, (1) шарттын жок дегенде бирин $f(x)$ функциясы канагаттандырган $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,$ чекиттерин табууга келтирилет. Мындай чекиттер 2-түрдөгү үзүлүү чекиттери болору белгилүү. Мисалы, $y=\frac{x^2}{x^2-1}$ функциясынын вертикаль асимптоталарын табуу керек дейли.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} y=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x^2}{(x-1)(x+1)}=+\infty;\ \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} y=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{x^2}{(x-1)(x+1)}=$$

$=-\infty$ болот. Функция жуп болгондуктан, $\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} y=-\infty,$



35-чийме

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} y = +\infty$ болот. Демек, $x=-1$, $x=+1$ вертикаль асимптоталар болот (35-чийме).

2. Жантык асимптоталар. Ийри сызыктын $y=ax+b$ түрүндөгү асимптоталары *жантык асимптоталар* (жалпы эле вертикалдык эмес асимптоталар) деп аталат, $a=0$ болгондо, $y=b$ болот. Бул учурда жантык асимптота x огуна параллель болот жана горизонталь асимптота деп аталат.

Теорема. $f(x)$ ийри сызыгы $y=ax+b$ асимптотасына ээ болсун үчүн

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x)-(ax+b)]=0 \qquad (1)$$

шартынын аткарылышы зарыл жана жетиштүү.

Далилдөө. а) Жетиштүүлүгү. (1) шарт аткарылганда $y=ax+b$ түз сызыгы асимптота болорун, б. а. $x\to\pm\infty$ болгондо, $d\to 0$ болорун далилдейбиз. Мейли L түз сызыгынын теңдемеси $y=ax+b$ болуп, анын x огунун оң багыты менен пайда кылган бурчу α болсун дейли (32-чийме). $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ себеби: асимптота шарт боюнча вертикалдуу эмес. $QM\perp L$, $QM=d$, Q жана P чекиттери тиешелүү түрдө ошол эле бир абсцисса x ке ээ болушкан, $f(x)$ ийри сызыгынын жана L түз сызыгынын чекиттери болот. Демек, $QP=$ $=f(x)-(ax+b)$ болот. $\triangle PQM$ ден

$$d=QP\cos\alpha. \qquad (2)$$

Бул барабардыктан (1) аткарылганда, б. а. $QP\to 0$ болгондо, $d\to 0$ болору келип чыгат.

б) Зарылдыгы. $y=ax+b$ асимптота болсо, б. а. $x\to\pm\infty$ болгондо, $d\to 0$ болсо, (1) шарт аткарыларын далилдейбиз. (2) ден $d\to 0$ болгондо, $QP\to 0$ болору ($\cos\alpha\neq 0$) көрүнүп турат. Теорема толук далилденди.

Бул теоремадан $f(x)$ ийри сызыгынын $y=b$ горизонталь асимптотасынын бар болуусунун зарыл жана жетиштүү шарты $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(=b$ болору келип чыгат.

Жантык асимптотаны табуунун эрежеси. $y=\mathrm{f}(x)$ ийри сызыгы $y=ax+b$ асимптотасына ээ болсун дейли. Анда (1) ден $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right)=0$ келип чыгат. Мындан $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{b}{x}=0$ болгондуктан, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-a\right)=0$ болот. Анда

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a \tag{3}$$

(1) нин натыйжасы болгондуктан (3) шарт $y=\mathrm{f}(x)$ ийри сызыгынын жантык асимптотасы $y=ax+b$ түз сызыгы болуусунун зарыл шарты болот. Мейли, бул шарт аткарылуу менен

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)=b \tag{4}$$

шарты да орундалсын дейли. Анда буга тең күчтүү болгон (1) шарт орундалат. Демек, $y=ax+b$ түз сызыгы $y=f(x)$ ийри сызыгынын жантык асимптотасы болот. Мындан жантык асимптотаны табуунун төмөнкүдөй эрежеси келип чыгат: Адегенде (3) шартты текшерип, анан эгер a бар болсо (4) шартты текшерүү керек, a жана b экөө тең бар болгондо, $y=\mathrm{f}(x)$ ийри сызыгынын жантык асимптотанын бар экенин далилдеген жана аны $y=ax+b$ теңдемеси түрүндө тапкан болобуз.

Эскертүүлөр. 1) (3) шарттын аткарылышы $y=\mathrm{f}(x)$ ийри сызыгынын жантык асимптотасынын бар болушунун жетиштүү эмес, зарыл гана шарты болот.

Мисалы, $y=x+\sqrt[3]{x}$ ийри сызыгы үчүн $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=$ $=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)=1$ болот. Бирок $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x+\sqrt[3]{x}-x)=$ $=\pm\infty$.

Демек, берилген ийри сызыктын жантык асимптотасы жок болот.

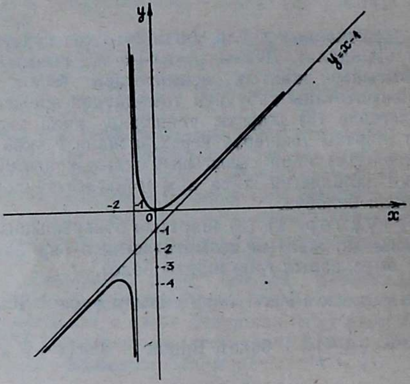
2) Эгер a бар болсо жана $a=0$ болсо, b бар болсо ийри сызык горизонталь асимптотага ээ болот.

3) Эгер $f(x)-(ax+b)>0$ болсо, ийри сызык асимптотанын жогор жагына, $\mathrm{f}(x)-(ax+b)<0$ болсо, төмөн жагына жайланышат. Мисалы, $y=\frac{x^2}{x+1}$ ийри сызыгынын асимптоталарын тапкыла, $x\neq1$.

а) Вертикаль асимптоталары. $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ x>-1}} \dfrac{x^2}{x+1} = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ x<1}} \dfrac{x^2}{x+1} = -\infty$. Демек, $x=-1$ сызыгы берилген ийри сызыктын вертикаль асимптотасы болот.

б) Жантык асимптоталары $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\frac{x^2}{x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$, демек, $a=1$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{x^2}{x+1} - x\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-x}{x+1} = -1$, демек, $b=-1$. $y=x-1$ түз сызыгы берилген ийри сызыктын жантык асимптотасы болот (36-чийме).



36-чийме

Суроолор

1. Ийри сызыктын асимптотасынын аныктамасы кандайча айтылат?
2. Кандай түз сызык ийри сызыктын вертикаль асимптотасы деп аталат?
3. Ийри сызыктын жантык асимптотасы деп кайсындай түз сызыкты айтабыз?
4. Ийри сызыктын горизонталь асимптотасы деп кандай түз сызыкты айтабыз?
5. Түз сызык берилген ийри сызык үчүн, вертикаль асимптота болуш үчүн кандай шарттарды канаагаттандыруу керек?

6. $y=ax+b$ түз сызыгы ийри сызыктын жантык асимптотасы болушу жөнүндөгү теореманы айтып, далилдеп бергиле.

7. Ийри сызыктын жантык асимптотасын табуунун жолу кандай?

Көнүгүүлөр

Төмөнкү функциялардын асимптоталарын тапкыла:

117. $y=\frac{1}{x^2}$.

118. $y=\frac{3x+5}{2x-6}$.

119. $y=\frac{2x}{1-x}$.

120. $y=\frac{x^2-8}{x^2+2}$,

121. $y=x+\frac{1}{x}$.

122. $y=\frac{x^2}{(x-1)^2}$.

123. $y=\frac{x^3}{x^2+2}$.

124. $y=xe^{\frac{2}{x}}$.

§ 13. ӨЗ АРА ТЕСКЕРИ ФУНКЦИЯЛАР ЖАНА АЛАРДЫН ГРАФИКТЕРИ

Эгерде $y=f(x)$ функциясы M көптүгүндө аныкталып, маанилеринин областы N көптүгү болсо, ар бир $x\in M$ санына $f(x)=y\in N$ бир гана саны ылайык келет. Тескеринче, $y\in N$ ар бир санына бир гана $x\in M$ саны ылайык коюлушу мүмкүн. Анда x менен y тин маанилеринин арасында өз ара бир мааниде ылайык келүү орун алат жана алардын каалаганын көз каранды эмес өзгөрмө чоңдук катарында эсептесек, экинчиси анын функциясы болот. Мисалы, кээ бир нерсе 30 минута кыймылда болуп, y жолунун x убактысынан болгон көз карандылыгы

$$y=f(x)=\frac{4}{3}x+5 \tag{1}$$

теңдемеси аркылуу туюнтулсун дейли. Анда шарт боюнча бул функциянын аныкталуу областы $M=[0, 30]$ кесиндиси болот, ал эми маанилеринин областы $N=[5, 45]$ кесиндиси болорун эсептөө кыйын эмес. (1) теңдемени x ке карата чыгарып, ар бир $y\in N$ маанисине $y=f(x)$ болгудай болуп, $x=\frac{3}{4}\ y-\frac{15}{4}$ бир гана мааниси ылайык келерин табабыз. Ошентип, берилген функциялык көз карандылыкта өзгөрмө чоңдуктардын ролдорун алмаштырып, $x=\varphi(y)=\frac{3}{4}y-\frac{15}{4}$ функциясына ээ болдук, бул функцияны $y=f(x)$ берилген функциясына карата тескери функция деп айтуу жүйөлүү болор эле.

Аныктама. Эгерде M көптүгүндө маанилеринин областы N көптүгү болгон $y=f(x)$ функциясы аныкталса жана ар бир $y \in N$ санына $f(x)=y$ болгудай болуп, $x \in M$ дин бир гана мааниси туура келсе, анда мындай жол менен аныкталган $x=\varphi(y)$ функциясы $y=f(x)$ функциясына карата тескери функция деп айтабыз.

Бул аныктаманын негизинде бири экинчисине карата тескери болгон (өз ара тескери болушкан) функциялардын төмөнкүдөй түгөйлөрүнө ээ болобуз:

$$y=\frac{3-5x}{2}; \qquad x=\frac{3-2y}{5}.$$

$$y=a^x; \qquad x=\log_a y.$$

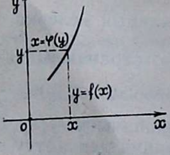
$$y=x^3; \qquad x=\sqrt[3]{y} \qquad \text{ж. б.}$$

Өзүнүн аныкталуу областы болгон $(-\infty, +\infty)$ аралыгында $y=x^2$ функциясын карап көрөлү. Бул аралыкта берилген функция тескери функцияга ээ болбойт, себеби, каалаган $y>0$ маанисине x тин эки мааниси ылайык келет: $x=-\sqrt{y}$; $x=+\sqrt{y}$; $f(x)=x^2$ функциясы $M_1=(-\infty, 0)$ аралыгында $\varphi_1(y)=-\sqrt{y}$ тескери функциясына, $M_2=(0, +\infty)$ аралыгында $\varphi_2(y)=+\sqrt{y}$ тескери функциясына ээ болот.

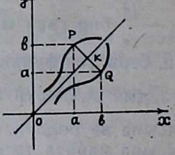
Жогорку аныктамадан өз ара тескери $y=f(x)$ жана $x=\varphi(y)$ функцияларынын графиктери, ошол эле бир сызык болоору келип чыгат. Бирок алар эки xoy жана yox координаталар системасына ылайык келет: биринчи координата системасына көз каранды эмес өзгөрмөнүн огунун милдетин ox огу аткарса, экинчисинде oy огу аткарат (37-чийме).

Биз буга чейин $y=f(x)$ функциясына тескери функциясын $x=\varphi(y)$ аркылуу жазып көрсөтүп келдик. Бул белгилөөдө өзгөрмөлөрдүн ролдорунун алмашылышы түздөн түз көрүнүп турат.

Функция аныкталуу областы жана туура келүү эрежеси



37-чийме



38-чийме

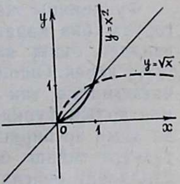
аркылуу толук түрдө аныкталгандыктан, $x=\varphi(x)$ тескери функциясын $y=\varphi(x)$ деп жазып көрсөтүүгө толук мүмкүн. Албетте, мында X аргумент N көптүгүндө, б. а. $y=f(x)$ функциясынын маанилеринин көптүгүндө өзгөрүү керек.

Бир эле координаталык системада сызылган өз ара тескери функциялардын графиктеринин арасындагы байланышты карайлы. Мейли, $y=f(x)$ жана $y=\varphi(x)$ функциялары өз ара тескери болсун дейли. Анда $b=f(a)$ жана $\varphi(b)=a$ барабарсыздыктары тең күчтүү болот жана $P(a, b)$, $Q(b, a)$ чекиттери тиешелүү түрдө $y=f(x)$ жана $y=\varphi(x)$ ийри сызыктарында жатары көрүнүп турат (38-чийме). Мында $PQ \perp QK$, $PK=KQ$, б. а. P жана Q чекиттери биринчи координаталык бурчтун биссектрисасына карата симметриялуу болот. Буга $KPBO$ жана $KQBO$ төрт бурчтуктарынын барабар экенинен ишенүүгө болот.

Мындан $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$ өз ара тескери функцияларынын графиктери биринчи координаталык бурчтун биссектрисасына карата симметриялуу болоору келип чыгат. Өз ара тескери болгон эки функциянын биринин графиги белгилүү болсо, координата тегиздигин OK боюнча бүктөө менен экинчисинин графигин оңой эле табууга болот. Мисалы: $y=x^2$ тын $(x \geqslant 0)$ графиги белгилүү болсо, $y=\sqrt{x^2}$ тын графигин $y=x^2$ тын графигине OK га карата симметриялуу болгон сызык катарында табуу оңтойлуу болот (39-чийме).

Ар кандай функцияга карата анын тескери функциясы боло бербейт. Төмөнкү теорема берилген $y=f(x)$ функциясынын тескери функцияга ээ болуусунун жетиштүү шартын көрсөтөт жана тескери функциянын бар болуусу жөнүндөгү теорема деп аталат.

Теорема. Эгерде $y=f(x)$ функциясы кандайдыр M көптүгүндө аныкталып, монотондуу өсүүчү (кемүүчү) жана үзгүлтүксүз болсо, анда бул функциянын маанилеринин областы болгон N көптүгүндө $x=\varphi(y)$ тескери функциясы бар болот жана ал дагы монотондуу өсүүчү (кемүүчү) жана үзгүлтүксүз болот[1].



39-чийме

---

[1] Бул теореманын далилдөөсүн математикалык анализ окуу китебинен, мисалы Г. М. Фихтенгольц «Основы математического анализа», том I, М., 1968-жыл, 132—133-беттерди карагыла.

Суроолор

1. Берилген $f(x)$ функциясына тескери функция деп кандай функцияны айтабыз?

2. Өз ара тескери функциялардын графиктеринин арасында кандай байланыштар бар? Ал байланыштын бар экенин далилдегиле.

3. Тескери функциянын болушу жөнүндөгү теорема кандай айтылат?

4. Берилген функциянын касиеттерине карап, ага тескери функциянын кайсындай касиеттери бар экенин дароо айтууга болобу?

5. Өз ара тескери функциялардын аныкталуу жана маанилеринин областтарынын арасында кандай байланыштар бар?

Көнүгүүлөр

125. Төмөнкү функцияларга карата тескери болгон функцияларды жазгыла жана табылган өз ара тескери функциялардын түгөйүндөгү ар бир функциянын аныкталуу областын, маанилеринин областын көрсөткүлө. Ар бир функция үчүн тескери функция бар болоорун далилдегиле:

1) $y=5x+3$;

2) $y=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}$;

3) $y=\frac{1}{x}$;

4) $y=x^2+1$; $(x\geqslant 0)$;

5) $y=x^3-3$;

6) $y=1+\sqrt{x-1.}$

126. $y=x^3$ функциясынын графигинин негизинде $y=\sqrt[3]{x}$ функциясынын графигин түзгүлө.

127. $y=2^x$ функциясынын графигинин негизинде $y=\log_2 x$ функциясынын графигин түзгүлө.

128. $y=x^2-1$ $(x\geqslant 0)$ функциясынын графигинин негизинде $y=\sqrt{x+1}$ функциясынын графигин түзгүлө.

§ 14. ФУНКЦИЯНЫ ЖАЛПЫ ИЗИЛДӨӨНҮН СХЕМАСЫ ЖӨНҮНДӨ

Функцияны жалпы жана толук изилдөө үчүн, аны жогоруда биз карап өткөн касиеттердин баарына карата изилдеп, ошол касиеттеринин негизинде анын графигин түзүү керек. Ошондо гана берилген функция жөнүндө толук информация, так элес алууга болот. Биз мындан ары элементардык функциялардын түрлөрүн өз алдынча караганда анын ар бирин жалпы жана толук изилдөөгө, графигин түзүүгө тийиш болобуз. Функцияны толук жана жалпы изилдөөнү белгилүү иретте, кандайдыр бир схема боюнча жүргүзүү пайдалуу болот. Биз төмөнкү схеманы колдонуу максатка ылайыктуу деп эсептейбиз:

1) Функциянын аныкталуу областын табуу.

2) Анын жуп, тактыгын билүү.

3) Функцияны үзгүлтүксүздүккө изилдөө.

4) Функциянын монотондуулук аралыктарын, экстремалдык чекиттерин табуу.

5) Аны томпоктукка, ийментикке изилдөө жана функциянын графигинин ийилүү чекитин табуу.

6) Аргументтин мааниси чексизге кеткендиги жана экинчи түрдөгү үзүлүү чекитинин аймагындагы (эгер андай чекиттер бар болсо) функциянын өзгөрүү мүнөзүн кароо.

7) Функциянын маанилеринин областын табуу.

8) Анын эң чоң жана эң кичине маанисин билүү.

9) Чектелген, чектелбегенин табуу.

10) Функциянын нөлүн, белгилеринин турактуу аралыктарын табуу.

11) Функциянын графигинин асимптоталарын табуу.

12) Анын графигин түзүү.

Бул схемада касиеттердин ирети, функциянын улам мурунку табылган касиеттери анын кийинки касиеттерин изилдөөгө белгилүү өлчөмдө жардам бергидей даражада тандалып алынды. Мисалы, функциянын жуптугунун, тактыгынын белгилүү болушу айрым функцияларды монотондуулукка, андан ары томпоктукка жана ийментикке изилдөөнү жеңилдетет. Функциянын маанилеринин областы белгилүү болсо, анын эң чоң жана эң кичине мааниси, чектелген, чектелбегени оңой эле табылат. Функциянын эң чоң жана эң кичине маанилери белгилүү болсо, бир катар учурларда анын белгилеринин турактуу аралыктарын табууга жардам берет ж. б.

Жогорку схемада функциянын мезгилдүүлүгүнүн касиеттери киргизилген жок, себеби, элементардык функциялардын ичинен тригонометриялык функциялар гана мезгилдүү болушат, ал эми алардын мезгилдүүлүгү жөнүндөгү маселе § 7 де толук каралды.

II ГЛАВА

АЛГЕБРАЛЫК ЭЛЕМЕНТАРДЫК ФУНКЦИЯЛАР

§ 15. НАТУРАЛДЫК КӨРСӨТКҮЧТҮҮ ДАРАЖАЛУУ ФУНКЦИЯ

$y=x^{\alpha}$ түрүндөгү функция даражалуу функция деп аталат, мында x — аргумент, α болсо, берилген ар кандай чыныгы сан. Жалпы түрдө мындай функцияларды кароого боло турганы III главада көрсөтүлөт.

Биз даражалуу функцияны баяндоону, анын жекече учуру болгон натуралдык көрсөткүчтүү даражалуу функцияны, б. а. $y=x^n$ түрүндөгү функцияны кароодон баштайбыз. Мында n — берилген натуралдык ар кандай сан.

1) Ар кандай чыныгы санды натуралдык даражага көтөрүүгө болгондуктан, бул функциянын аныкталуу областы $(-\infty, +\infty)$ аралыгы болот.

2) n жуп сан болгондо, функция да жуп, так сан болгондо, функция да так функция болот. Чындыгында да, $(-x)^{2k}=x^{2k}$ болгондуктан, $\mathrm{f}(-x)=\mathrm{f}(x)$ шарты аткарылып, функция жуп болот (мында $k=1, 2, 3, \ldots$). Так болгон учур, ушул сыяктуу эле оңой далилденет.

3) Бул функция $y=x^n=\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n}$ болуп, чектүү сандагы үзгүлтүксүз функциялардын көбөйтүндүсү болгондуктан, *үзгүлтүксүз функция* болот.

4) Функциянын монотондуулук аралыктары, экстремалдык чекиттери. Элементардык жол менен изилдөө:

$0<x_1<x_2<+\infty$ болсун, $x_2^n-x_1^n=(x_2-x_1)(x_2^{n-1}+$ $+x_1x_2^{n-2}+x_1x_2^{n-3}+\ldots+x_1^{n-2}\cdot x_2+x_1^{n-1})$, оң жактагы эки көбөйүүчүлөрдүн ар бири оң болгондуктан, $x_2^n-x_1^n>0$, демек, $x_2^n>x_1^n$болот.

Демек, функция $(0, +\infty)$ аралыгында дайыма өсүүчү болот.

§ 8 деги функциянын жуп, тактыгы менен монотондуулугунун байланышы жөнүндөгү теореманын негизинде жуп функциялар $(0, +\infty)$, $(-\infty, 0)$ аралыктарында карама-каршы багытта, так функциялар бирдей багытта өзгөргөндүктөн, $y=x^n$ функциясы n жуп сан болгондо, $(-\infty, 0)$

аралыгында кемүүчү, n так сан болгондо, өсүүчү функция болот. Демек, n так сан болгондо, бул функция $(-\infty, +\infty)$ аралыгында өсүүчү функция болот. Ошентип, n жуп сан болгондо, $x=0$ чекити функциянын минимум чекити болот, максимум чекити жок. Ал эми n так сан болгондо, функциянын экстремалдык чекиттери жок болот.

Туундуну колдонуп изилдөө.

$y=x^n$; $y'=nx^{n-1}$; $nx^{n-1}=0$, $x=0$, себеби. $n\geqslant 1$.

а) $-\infty<x<0$ болгондо, $n-1$ жуп сан (n так сан) болгондо, $y'>0$ болот, демек, функция өсөт. Эгер $n-1$ так сан (n жуп сан) болсо, $y'<0$ болот, демек, функция кемийт.

б) $+\infty>x>0$ болгондо, дайыма $y'>0$ болгондуктан, функция дайыма өсүүчү болот. Демек, n жуп сан болгондо, $x=0$ минимум чекити болот, n так сан болгондо, экстремалдык чекит жок болот.

5) Функциянын томпоктугу, ийметиги жана ийилүү чекити.

Элементардык жол менен изилдөө. $(0, +\infty)$ аралыгында $y=x^n$ функциясы бардык $n>1$ үчүн иймек болот. ($n=1$ болгондо, функция томпок да, иймек да болбойт. Графиги түз сызык болот.) Биз муну математикалык индукция методу менен далилдейбиз.

а) $n=2$ болсун. $A=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{2}-\dfrac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}{4}=$

$=\dfrac{(x_1-x_2)^2}{4}>0.$

Демек, бул учурда функция иймек болот. (Шарт боюнча дайыма $x_1\neq x_2$.)

б) $(0, +\infty)$ аралыгында, $y=x^{n-1}$ функциясы иймек болсун деп болжолдойлу. Анда,

$$\frac{x_1^{n-1}+x_2^{n-1}}{2}>\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{n-1} \qquad (1)$$

болот.

в) Ушул болжолдун негизинде, $y=x^n$ функциясы, ошол эле аралыкта иймек экенин далилдейбиз.

(1) негизинде $\dfrac{x_1^{n-1}+x_2^{n-1}}{2}\cdot\dfrac{x_1+x_2}{2}>\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{x_1+x_2}{2}$

(шарт боюнча $x_1>0$; $x_2>0$). Анда

$$\frac{x_1^n+x_2^n+(x_2x_1^{n-1}+x_1x_2^{n-1}}{4}>\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^n. \qquad (2)$$

Эгерде $x_1 > x_2$ болсо, $x_1^{n-1} > x_2^{n-1}$ болот. Анда $x_1 - x_2 > 0$, $x_1^{n-1} - x_2^{n-1} > 0$ болгондуктан, $(x_1^{n-1} - x_2^{n-1})(x_1 - x_2) > 0$ болот. Эгерде $x_1 < x_2$ болсо, $x_1^{n-1} < x_2^{n-1}$ болот да $x_1 - x^2 < 0$, $x_1^{n-1} < x_2^{n-1} < 0$ болгондуктан, дагы эле $(x_1^{n-1} - x_2^{n-1})(x_1 - x_2) > 0$ болот. Демек, бул барабарсыздык $x_1 \neq x_2$ болгондо, дайыма туура болот. Мындан

$$x_1^n + x_2^n > x_1 x_2^{n-1} + x_2 x_1^{n-1} \qquad (3)$$

келип чыгат. Анда (2), (3) негизинде $\frac{x_1^n + x_2^n + x_1^n + x_2^n}{4} > \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^n$, демек, $\frac{x_1^n + x_2^n}{2} > \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^n$ болот. Далилденди.

§ 9 дагы функциянын жуп, тактыгы менен томпок, иймектигинин байланышы жөнүндөгү теореманын негизинде n — жуп сан болгондо, функция жуп болгондуктан, $(-\infty, 0)$ аралыгында иймек болот; n — так сан болгондо функция так болгондуктан, $(-\infty, 0)$ аралыгында томпок болот. Демек, n жуп сан болгондо, $y = x^n$ функциясы дайыма иймек болот. Мындан n жуп сан болгондо, функциянын ийилүү чекити жок боло турганы, n так сан болгондо, $x = 0$ ийилүү чекити болоору келип чыгат.

Туундуну колдонуп изилдөө. $y = x^n$, $y'' = n\ (n-1)\, x^{n-2}$, $n \cdot (n-1)\, x^{n-2} = 0$, $x = 0$. Эгер $n = 1$ болсо, дайыма $y = 0$. Демек, ийилүү чекити жок, функция иймек да, томпок да эмес, графиги (0, 0), (1, 1) чекиттери аркылуу өткөн түз сызык болот.

Эгер $n > 1$ болсо, $n - 2$ жуп сан, б. а. n жуп сан болсо, дайыма $y'' > 0$ болот. Демек, функция $(-\infty, \infty)$ аралыгында иймек болот, ийилүү чекити жок болот.

$n - 2$ так сан, б. а. n так сан болсо: а) $x < 0$ болсо, $y'' < 0$ болуп, функция томпок болот. б) $x > 0$ болсо, $y'' > 0$ болуп, функция иймек болот. Ошентип, бул учурда $x = 0$ чекити функциянын ийилүү чекити болот.

6) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{эгер } n \text{ — жуп сан болсо,} \\ -\infty, & \text{эгер } n \text{ — так сан болсо.} \end{cases}$

7) «4», «6» касиеттердин негизинде функциянын маанилеринин областы: а) эгер n — жуп сан болсо, $[0, +\infty)$ аралыгы, б) эгер n — так сан болсо, $(-\infty, +\infty)$ аралыгы болот.

8) Жогорку «7» касиеттин негизинде, эгер n — жуп сан болсо, функциянын эң кичине мааниси $y=0$ болот, эң чоң мааниси жок болот, эгерде n — так сан болсо, функциянын эң чоң жана эң кичине маанилери болбойт.

9) Ошол эле «7» касиеттин негизинде, эгерде n — жуп сан болсо, функция төмөн жактан $y=0$ менен чектелген, жогор жактан чектелбеген болот, эгер n — так сан болсо, функция чектелбеген болот.

10) Функциянын нөлү жана белгиленген турактуу аралыктары $x^n=0$ болсун үчүн $x=0$ болушу керек болгондуктан бул функциянын нөлү $x=0$ чекити болот.

Эгер n — жуп сан болсо, $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ аралыктарында дайыма $y>0$ («7» касиеттин негизинде). Эгер n — так сан болгондо:

а) $-\infty<x<0$ болсо, $x^n<0$ болгондуктан, $y<0$ болот,

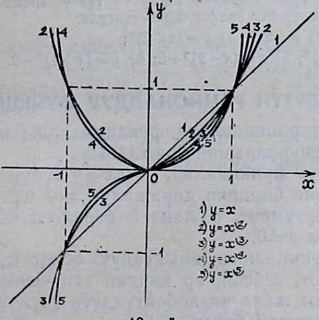
б) $0<x<+\infty$ болсо, $x^n>0$ болгондуктан, $y>0$ болот.

11) Экинчи түрдөгү үзүлүү чекиттери (ал гана эмес 1-түрдөгү үзүлүү чекиттери) жок болгондуктан, функциянын графигинин вертикаль асимптоталары жок болот.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^n}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}x^{n-1}=\pm\infty$$

болгондуктан, жантык асимптоталары да жок болот.

12) Функциянын графигин түзүү. Бул функциянын графигин түзүүдө, анын жогорку айтылган касиеттеринен башка да төмөнкүлөрдү эске алуу керек. $|x|<1$ болгондо, функция жай өсөт жана жай кемийт. n дин мааниси өскөн сайын, ошол эле бир абсциссага ээ болгон функциялардын маанилеринин модулу кичиреет, б. а. графиги абсцисса



40-чийме

огуна жакындайт. $|x|>1$ болгондо, тескерисинче, функция тез өсөт жана тез кемийт. n дин мааниси өскөн сайын, ошол эле бир абсциссага ээ болгон функциянын маанилеринин модулу чоңоёт, б. а. графиги ордината огуна жакындайт.

n дин бардык маанилеринде $f(0)=0$, $f(1)=1$. Демек, бардык графиктер (0, 0) жана (1, 1) чекиттеринде кесилишет (40-чийме).

Суроолор

1. Даражалуу функция, ошонун ичинде натуралдык көрсөткүчтүү даражалуу функция деп, кандай функцияны айтабыз?

2. Натуралдык көрсөткүчтүү даражалуу функциянын төмөнкү касиеттерин, негиздеп айтып бергиле:

1) Аныкталуу областы.
2) Жуптугу, тактыгы.
3) Монотондуулугу, экстремалдык чекиттери.
4) Томпоктугу, иймектиги, ийилүү чекиттери.
5) Маанилеринин областы.
6) Эң чоң жана эң кичине маанилери.
7) Чектелген, чектелбегени.
8) x тин жана n дин маанилерине карата бул функциянын графиктери өз ара кандай жайланышат?

Көнүгүүлөр

129. Төмөнкү функциялардын графиктерин, анын изилденген касиеттеринин негизинде түзгүлө:

1) $y=x^7$; 2) $y=x^{16}$; 3) $y=x^{58}$; 4) $y=x^{109}$; 5) $y=x^{238}$.

130. Төмөнкү функциялардын ар бирин берилген схема боюнча алдын ала изилдеп алып, графигин түзгүлө жана графиги боюнча анын касиеттерин айтып бергиле:

1) $y=x^6$; 2) $y=x^{13}$; 3) $y=x^{45}$; 4) $y=x^{108}$.

131. Графиктерди жөнөкөй өзгөртүп түзүү эрежелерин колдонуп, төмөнкү функциялардын графиктерин түзгүлө:

1) $y=3x^2$; 2) $y=2x^3$; 3) $y=(x+2)^5$;
4) $y=(x-3)^8$; 5) $y=(x-2)^3+3$; 6) $y=(x+1)^4-2$.

§ 16. БҮТҮН РАЦИОНАЛДУУ ФУНКЦИЯЛАР

Биз бүтүн рационалдуу функцияларды кароону, анын айрым жеке учурларынан баштайбыз.

1. Сызыктуу функциялар. $y=ax+b$ түрүндөгү сызыктуу функциялар же биринчи даражалуу эки мүчө деп аталат. Мында x — аргумент, a жана b берилген чыныгы сандар болушат жана $a\neq0$.

1) Бул функциянын аныкталуу областы, $(-\infty, +\infty)$ аралыгы болот, себеби, ар кандай эки чыныгы санды көбөйтүүгө болот жана ал көбөйтүндүгө үчүнчү чыныгы санды дайыма кошууга болот.

2) Берилген функция жуп да, так да функция эместигин өзүңөр текшерип ишенгиле.

3) Бул функция чектүү сандагы үзгүлтүксүз функциялардын суммасы болгондуктан, өзү да үзгүлтүксүз.

4) Функциянын монотондуулук аралыктары жана экстремалдык чекиттери. Элементардык жолду колдонуп изилдөө.

а) $a>0$ $x_1<x_2$ болсун дейли. Анда $ax_1<ax_2$, $ax_1+b<$ $<ax_2+b$, демек, $y_1<y_2$, функция дайыма өсүүчү болот.

б) $a<0$ болгондо, функция дайыма кемүүчү болоруна өзүңөр ишенгиле. Функциянын экстремалдык чекиттери жок. Туундуну колдонуп, бул касиетти изилдөөнү өзүңөр жүргүзгүлө.

5) Функциянын томпоктугу жана иймектиги, ийилүү чекиттери. Элементардык жолду колдонуп изилдөө.

$$A=\frac{ax_1+b+ax_2+b}{2}-\left[a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+b\right]=0 \quad (x_1\neq x_2).$$

Демек, функциянын графиги иймек да эмес, томпок да эмес, түз сызык болот, ийилүү чекити жок. Бул түз сызык $(0,\ b)$ жана $\left(-\frac{b}{a},\ 0\right)$ чекиттери аркылуу өтөрү көрүнүп турат. Туундуну колдонуп, бул касиетке изилдөөнү өзүңөр жүргүзгүлө.

6) $$\lim_{x\to+\infty}(ax+b)=\lim_{x\to+\infty}a\left(x+\frac{b}{a}\right)=\begin{cases}+\infty, \text{ эгер } a>0 \text{ болсо.}\\ -\infty, \text{ эгер } a<0 \text{ болсо,}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty}(ax+b)=\lim_{x\to-\infty}a\left(x+\frac{b}{a}\right)=\begin{cases}+\infty, \text{ эгер } a<0 \text{ болсо.}\\ -\infty, \text{ эгер } a>0 \text{ болсо,}\end{cases}$$

7) «4» жана «6» касиеттерден, функциянын маанилеринин областы $(-\infty,\ +\infty)$ аралыгы экени көрүнүп турат.

8) «7» негизинде, функциянын эң чоң жана эң кичине мааниси жок.

9) Ошол эле «7» негизинде функция чектелбеген.

10) $ax+b=0$, $x=-\frac{b}{a}$ функциянын нөлү болот.

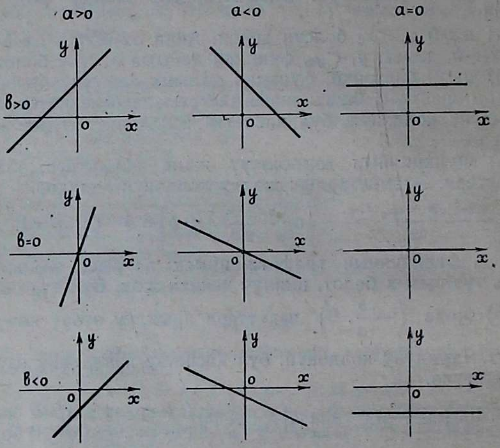
$y=ax+b=a\left(x+\frac{b}{a}\right)$. а) $a>0$, $x>-\frac{b}{a}$ болсо, $y>0$ болот, $x<-\frac{b}{a}$ болсо, $y<0$ болот.

в) $a<0$, $x>-\frac{b}{a}$ болсо, $y<0$ болот,

$x < \frac{b}{a}$ болсо, $y > 0$ болот.

11) Функциянын графиги түз сызык болгондуктан, анын асимптотасы жок.

12) Функциянын графиги (41-чийме).



41-чийме

Суроолор

1. Сызыктуу функция деп, кандай функцияны айтабыз?
2. Сызыктуу функциянын монотондуулук аралыктарын көрсөткүлө.
3. Бул функциянын томпоктугу жана иймектиги жөнүндө эмне айтууга болот?
4. Сызыктуу функциянын аныкталуу областын жана маанилеринин областын көрсөткүлө.
5. Бул функциянын белгилеринин туруктуу аралыктары жөнүндө айтып бергиле.
6. Функциянын графигин a жана b нын белгилерине карата бардык учур үчүн сызып көрсөткүлө.

2. Квадраттык үч мүчө. $y = ax^2 + bx + c$ функциясы квадраттык үч мүчө же квадраттык функциянын жалпы түрү деп аталат. Мында x — аргумент, a, b жана c берилген чыныгы сандар болушат жана $a \neq 0$. 1) Ар кандай чыныгы санды квадратка көтөрүп, аны башка чыныгы санга көбөйтүп, аны дагы башка чыныгы санга кошууга дайыма боло тургандыктан, бул функциянын аныкталуу областы $(-\infty, +\infty)$ аралыгы болот.

2) Бул функция жалпы учурда жуп да, так да эмес экенине оңой эле ишенүүгө болот.

3) Квадраттык үч мүчө үзгүлтүксүз функциялардын суммасынан түзүлгөндүктөн, өзү да үзгүлтүксүз функция болот.

4) Монотондуулук аралыгы, экстремалдык чекиттери. Элементардык жолдорду колдонуп изилдөө.

Адегенде квадраттык үч мүчөнүн толук квадратын бөлүп алалы. Анда ал төмөнкүдөй түргө келет:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}.$$

а) $a>0$.

1) $-\frac{b}{2a}<x_1<x_2<+\infty$ болсун. $0<x_1+\frac{b}{2a}<x_2+\frac{b}{2v}$,

$$0<\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)^2<\left(x_2+\frac{b}{2a}\right)^2,\quad 0<a\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)^2<a\left(x_2+\frac{b}{2a}\right)^2,$$

$$a\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}<a\left(x_2+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$ б. а. $y_1<y_2$

болот, демек, $a>0$ болгондо функция $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ аралыгында өсүүчү болот.

2) $-\infty<x_1<x_2<-\frac{b}{2a}$ болсун.

$$-\infty<x_1+\frac{b}{2a}<x_2+\frac{b}{2a}<0.\quad \left(x_1+\frac{b}{2a}\right)^2>\left(x_2+\frac{b}{2a}\right)^2>0$$

болот, анда $a\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}>a\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$ болот, б. а. $y_1>y_2$ болот, демек, $a>0$ болгондо, квадраттык үч мүчө $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ аралыгында кемүүчү болот. Ошентип, $a>0$ болгондо, $x=-\frac{b}{2a}$ чекити функциянын минимум чекити болот, максимум чекити болбойт жана бул чекитте $y_{min}=-\frac{b^2-4ac}{4a}$ болот.

б) $a<0$. 1) $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ аралыгында функция кемүүчү болорун, 2) $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ аралыгында функция өсүүчү болорун, ошентип, $x = -\frac{b}{2a}$ чекити функциянын максимум чекити болорун жана ал чекитте $y_{max} = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$ маанисин аларын жогоркуга окшоштуруп, өз алдынча далилдөө окуучуларга сунуш кылынат.

Туундуну колдонуп изилдөө:

$$y = ax^2 + bx + c.\ y' = 2ax + b = 2a\left(x + \frac{b}{2a}\right),\ 2ax + b = 0,$$

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

a	x y', y	$\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$	$-\frac{b}{2a}$	$\left(\frac{b}{2a}, +\infty\right)$
1) $a>0$	y' y	$-$ кемийт	0 минимум чекит	$+$ өсөт
			$y_{min} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$	$y_{max} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$
2) $a<0$	y' y	$+$ өсөт	0 максимум чекит	$-$ кемийт

5) Томпоктугу, ийментиги жана ийилүү чекити. Элементардык жолду колдонуп изилдөө:

$$A = -\frac{ax_1^2 + bx_1 + c + ax_2^2 + bx_2 + c}{2} - \left[a\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + b\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + c\right] = \frac{2ax_1^2 + 2bx_1 + 4c + 2ax_2^2 + 2bx_2 - ax_1^2 - 2ax_1x_2 - ax_1^2 - 2bx_1 - 2bx_2 - 4}{4} =$$

$$= \frac{ax_1^2 - 2ax_1x_2 + ax_2^2}{4} = \frac{a(x_1 - x_2)^2}{4}.$$

Эгер $a>0$ болсо, $A>0$; демек, функция иймек. Эгер $a<0$ болсо, $A<0$; демек, функция томпок болот. Функциянын графигинин ийилүү чекити жок болот.

Туундуну колдонуп изилдөө:
$y = ax^2 + bx + c$, $y' = 2ax + b$, $y'' = 2a = 0$ (себеби $a \neq 0$). Эгер $a>0$ болсо, $y''>0$, б. а. функция иймек болот, эгер $a<0$ болсо, $y''<0$, б. а. функция томпок болот. Функциянын графигинин ийилүү чекити жок болот.

6) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(ax^2+bx+c)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}ax^2\left(1+\frac{b}{ax}+\frac{c}{x^2}\right)=$

$=\begin{cases}+\infty, \text{ эгер } a>0,\\ -\infty, \text{ эгер } a<0,\end{cases}$

7) «4» жана «6» касиеттердин негизинде функциянын маанилеринин областы, эгер $a>0$ болсо, $\left[-\frac{b^2+4ac}{4a}, +\infty\right)$ аралыгы болот. Эгерде $a<0$ болсо, $\left(-\infty, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right]$ аралыгы болот.

8) «7» касиеттин негизинде, эгер $a>0$ болсо, функциянын эң кичине мааниси, $y=-\frac{b^2-4ac}{4a}$ болот, эң чоң мааниси жок болот, эгер $a<0$ болсо, функциянын эң чоң мааниси, $y=-\frac{b^2-4ac}{4a}$ болот, эң кичине мааниси жок болот.

9) Ошол эле «7» касиеттин негизинде, эгер $a>0$ болсо, функция төмөн жактан $y=-\frac{b^2-4ac}{4a}$ менен чектелет, жогор жактан чектелбейт. Эгер $a<0$ болсо жогор жактан $y=-\frac{b^2-4ac}{4a}$ менен чектелет, төмөн жактан чектелбейт.

10) Квадраттык үч мүчөнүн нөлдөрү жана белгилеринин турактуу аралыктары.

$ax^2+bx+c=0$, $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ функциясынын нөлдөрү болот. $b^2=4ac=D$ деп белгилейли. Виеттин теоремасынын негизинде $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$; $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ болорун эске алып, квадраттык үч мүчөнүн нөлдөрүнүн касиеттери жөнүндө төмөнкүдөй корутунду чыгарууга болот. $ax^2+bx+c=0$. Дайыма $a>0$ деп эсептөөгө болот.

Эгер $a<0$ болсо, бул теңдеменин эки жагын тең -1 ге көбөйтүп, $a>0$ болгон абалга жете алаар элек.

1. $c<0$, $D>0$. а) $b<0$ квадраттык үч мүчөнүн карама-каршы белгиде, эки чыныгы нөлдөрү болот жана $x_1<0$, $x_2>0$ болсо, $|x_1|<x_2$ болот б) $b>0$ нөлдөрү жогорудай эле болот, бирок $|x_1|>x_2$ болот. в) $b=0$, мында да нөлдөр жогорудай эле болот, бирок $|x_1|=x_2$.

2. $c=0$, $D>0$. а) $b<0$ квадраттык үч мүчөнүн $x_1=0$, $x_2>0$ болгон эки чыныгы нөлдөрү болот. б) $b>0$ квадрат-

тык үч мүчөнүн $x_1<0$, $x_2=0$ болгон эки чыныгы нөлдөрү болот. в) $b=0$, $D=0$. Квадраттык үч мүчөнүн $x_{1,2}=0$ болгон нөлдөрү болот.

3. $c>0$. а) $D>0$. 1) $b<0$ квадраттык үч мүчөнүн эки оң барабар эмес чыныгы нөлдөрү болот. 2) $b>0$. Квадраттык үч мүчөнүн эки терс барабар эмес чыныгы нөлдөрү болот.

б) $D=0$. 1) $b<0$. Квадраттык үч мүчөнүн эки оң барабар чыныгы нөлдөрү болот. 2) $b>0$. Квадраттык үч мүчөнүн эки терс барабар чыныгы нөлдөрү болот. 3) $b=0$ болсо, $D<0$ болуп калат.

в) $D<0$. Бул учурда квадрат үч мүчөнүн нөлдөрү мнимый болот. $y=ax^2+bx+c=a(x-x_1)\ (x-x_2)$ түрүндө квадраттык үч мүчө көбөйтүүчүлөргө ажыраары белгилүү. Мында, x_1, x_2 лер квадраттык үч мүчөнүн нөлдөрү.

а) Квадраттык үч мүчөнүн эки ар түрдүү чыныгы нөлдөрү бар болсун жана $x_1<x_2$ болсун дейли. Анда $y=a(x-x_1)\ (x-x_2)$. 1) $x<x_1$ болсун, анда $x<x_2$ болот, демек, $x-x_1<0$, $x-x_2<0$ болот. Бул учурда $a>0$ болсо, $y>0$ болот, $a<0$ болсо, $y<0$ болот. 2) $x>x_2$ болсун, анда $x>x_1$ болот, демек, $x-x_1>0$, $x-x_2>0$. Бул учурда $a>0$ болсо, $y\geqslant 0$ болот, $a<0$ болсо, $y<0$ болот. 3) $x_1<x<x_2$ болсун, анда $x-x_1>0$, $x-x_2<0$ болот. Бул учурда $a>0$ болсо, $y<0$ болот, $a<0$ болсо, $y>0$ болот.

б) Квадраттык үч мүчөнүн эки барабар чыныгы нөлдөрү болсун. Демек, $x_1=x_2$, анда $y=a\ (x-x_1)^2$; $x\neq x_1$ болгондо, эгер $a>0$ болсо, $y>0$ болот. Эгер $a<0$ болсо, $y<0$ болот.

в) Квадраттык үч мүчөнүн нөлдөрү мнимый болсун дейли. Анда $b^2-4ac<0$ болот. Квадраттык үч мүчөнү $y=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ түрүнө келтирели. Мында квадраттык кашаанын ичиндеги туюнтма дайыма оң маанини алаары көрүнүп турат. Демек, бул учурда эгерде $a>0$ болсо, $y>0$ болот, эгерде $a<0$ болсо, $y<0$ болот.

11) Квадраттык үч мүчөнүн асимптоталары жок болоруна өзүңөр текшерип, ишенгиле.

12) Квадраттык үч мүчөнүн графиги (42-чийме).

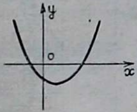
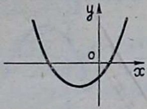
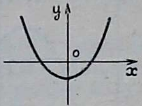
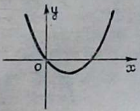
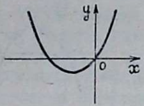
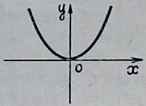
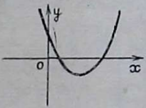
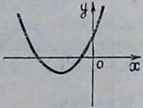
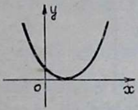
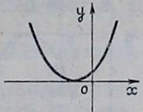
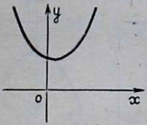
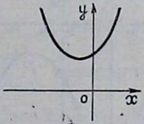
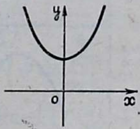
Суроолор

1. Квадраттык үч мүчөнүн аныкталуу жана маанилеринин областы кандай аралыктар болушат?

2. Квадраттык үч мүчөнүн монотондуулук аралыктары жөнүндө эмнени айтууга болот?

$$y=ax^2+bx+c$$

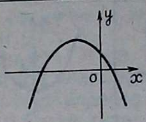
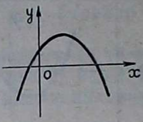
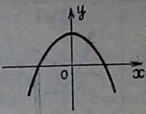
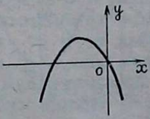
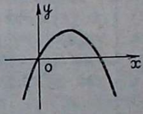
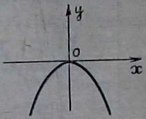
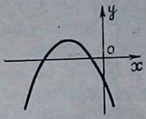
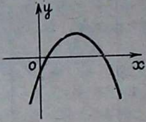
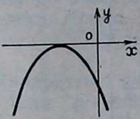
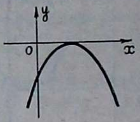
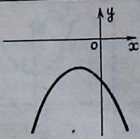
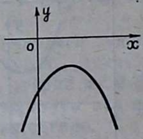
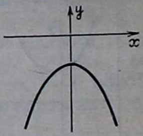
$$a>0$$

C ЖАНА D	$b<0$	$b>0$	$b=0$
$c<0$ $D>0$			
$c=0$ $D>0$			
$c>0$ $D>0$			
$c>0$ $D=0$			
$c>0$ $D<0$			

42-чийме

$D=b^2-4ac$

$a<0$

С ЖАНА D	$b<0$	$b>0$	$b=0$
$c>0$ $D>0$			
$c=0$ $D>0$			
$c<0$ $D>0$			
$c<0$ $D=0$			
$c<0$ $D<0$			

3. Кайсы чекиттер квадраттык үч мүчөнүн экстремалдык чекиттери болот?

4. Квадраттык үч мүчөнүн томпоктугу жана иймектиги жөнүндө эмне айтууга болот?

5. Бул функциянын чектелген, чектелбегени жана эң чоң, эң кичине маанилери жөнүндө айтып бергиле.

6. Квадраттык үч мүчөнүн графигин анын коэффициенттеринин жана дискриминантынын белгилерине карата бардык учурлар үчүн түзүп чыгып, таблица түрүндө жайлаштыргыла.

3. Биквадраттык үч мүчө. $y=ax^4+bx^2+c$ түрүндөгү функциялар биквадраттык үч мүчө деп аталат. Мында x — аргумент, a, b жана c — берилген чыныгы сандар болушат жана $a\neq 0$.

1) Бул функциянын аныкталуу областы бардык чыныгы сандардын көптүгү болорун өзүңөр негиздегиле.

2) Биквадраттык үч мүчө жуп функция болот, себеби, $a(-x)^4+b(-x)^2+c=ax^4+bx^2+c$, б. а. $f(-x)=f(x)$.

3) Бул функция үзгүлтүксүз функциялардын суммасынан тургандыктан, үзгүлтүксүз функция болот.

4) Функциянын монотондуулуктарынын аралыктары жана экстремалдык чекиттери.

Элементардык жол менен изилдөө. Функция жуп болгондуктан, аны $(0, +\infty)$ аралыгында изилдөө жетиштүү болот. Биз толук квадратын бөлүп алуу менен функцияны $y=a\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$ түрүндө жазып алабыз.

а) а$>$0 болсун. 1) $b>0$ болсун, анда $x^2+\frac{b}{2a}$ кошулуучусу $(0, +\infty)$ аралыгында оң мааниде болуп, $\frac{b}{2a}$дан $+\infty$ ге чейин өсөт, анда y бул аралыкта c *дан* $+\infty$ ге чейин өсөт, демек, $(-\infty, 0)$ аралыгында функция $+\infty$ ден c га чейин кемийт. Ошентип, $x=0$ чекити функциянын минимум чекити болот. 2) $b<0$ болсун, анда $y=a\left(x^2-\frac{|b|}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$ деп жазууга болот. $\left[0, \sqrt{\frac{|b|}{2a}}\right]$ кесиндиде $\left(x^2-\frac{|b|}{2a}\right)^2$ кошулуучусу $\frac{|b|^2}{4a^2}$ дан 0 гө чейин кемийт, ал эми $\left[\sqrt{\frac{|b|}{2a}}, +\infty\right)$ аралыгында 0 дөн $+\infty$ ге чейин өсөт. Анда y биринчи аралыкта c дан $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ га чейин кемийт, ал эми экинчи аралыкта болсо, $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ дан $+\infty$ ге чейин өсөт. Демек,

a	$\frac{x}{y', y}$	$\left(-\infty, -\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)$	$-\sqrt{-\frac{b}{2v}}$	$\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}, 0\right)$	0	$\left(0, +\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)$	$+\sqrt{-\frac{b}{2a}}$	$\left(+\sqrt{-\frac{b}{2a}}, +\infty\right)$
$a>0$	y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$a>0$	y	кемийт	минимум чекит	өсөт	максимум чекит	кемийт	минимум чекит	өсөт
$a<0$	y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$a<0$	y	өсөт	максимум чекит	кемийт	минимум чекит	өсөт	максимум чекит	кемийт

a	x / y'', y	$\left(-\infty, -\sqrt{-\frac{b}{6a}}\right)$	$-\sqrt{-\frac{b}{6a}}$	$\left(-\sqrt{-\frac{b}{6a}}\right), +\sqrt{-\frac{b}{6a}}\right)$	$+\sqrt{-\frac{b}{6a}}$	$\left(+\sqrt{-\frac{b}{6a}}, +\infty\right)$
$a>0$	y''	$+$	0	$-$	0	$+$
	y	иймек	ийилүү чекити	томпок	ийилүү чекити	иймек
$a<0$	y''	$-$	0	$+$		$-$
	y	томпок	ийилүү чекити	иймек	ийилүү чекити	томпок

$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{|b|}{2a}}\right]$ жана $\left[-\sqrt{\frac{|b|}{2a}}, 0\right]$ аралыктарында функция тиешелүү түрдө $+\infty$ ден $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ га чейин кемийт жана $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ дан c га чейин өсөт. Ошентип, $x=-\sqrt{\frac{|b|}{2a}}$, $x=+\sqrt{\frac{|b|}{2a}}$ функциянын минимум чекиттери, $x=0$ максимум чекити болот. 3) $b=0$ болсун. Анда функция $y=ax^4+c$ түрүнө келет. $(0, +\infty)$ да функция c дан $+\infty$ ге чейин өсөрү, $(-\infty, 0)$ аралыгында $+\infty$ ден c га чейин кемий турганы көрүнүп турат. Демек, $x=0$ функциясынын минимум чекити болот.

б) $a<0$ болгондо, функциянын өсүү, кемүүсү жогорку учурга караганда карама-каршы багытта болот. Ал эми экстремалдык чекиттер өзүлөрүнүн ролдорун алмашышат (максимум чекиттер минимум, ал эми минимум чекиттер максимум чекиттери болушат).

Туундуну колдонуп изилдөө. $y=ax^4+bx^2+c;$

$$y^1=4ax^3+2bx=4ax\left(x+\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right)\left(x-\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right).$$

Мындан $x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$, $x_3=0$ болгондо, $y'=0$ болору көрүнүп турат. $-\frac{b}{2a}>0$ болгон учур үчүн 80-беттеги таблицаны (жогоркусун) түзүүгө болот.

$$f\left(\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)=-\frac{b^2-4ac}{4a}; \quad \mathrm{f}(0) = c \text{ болот.}$$

Эгер $-\frac{b}{2a}<0$ болсо, биринчи туундунун $x=0$ бир гана чыныгы тамыры болот жана $a>0$ болгондо $x>0$ болсо, $y'>0$ болот да, функция өсүүчү болот; $x<0$ болсо, $y'<0$ болот, функция кемүүчү болот. Демек, $x=0$ функциянын минимум чекити болот.

Эгер $a<0$ болсо, бул айтылгандардын баары тескерисинче болот. Эгер $-\frac{b}{2a}=0$ болсо, $(a\neq0,\ b=0)$ биринчи туундунун $x=0$ деген үч эселүү тамыры болот жана функциянын өзгөрүү мүнөзү так эле $-\frac{b}{2a}<0$ болгон учурдагыдай болот.

5) Функциянын томпоктугу, иймектиги жана ийилүү чекити. Элементардык жолдорду колдонуп, биквадраттык үч мүчөнү бул касиетке изилдөө бир топ татаал болгондуктан, туундуну колдонуп изилдөө менен чектелебиз.

$$y'' = 12ax^2 + 26 = 12a\left(x^2 + \frac{b}{6a}\right) = 12a\left(x - \sqrt{-\frac{b}{6a}}\right)\left(x + \sqrt{-\frac{b}{6a}}\right).$$

Демек, $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{b}{6a}}$, болсо, $y''=0$ болот. $-\frac{b}{6a}>0$ учуру үчүн 80-беттеги таблицаны түзөбүз.

Эгер $-\frac{b}{6a}<0$ болсо, y'' тин чыныгы тамыры болбойт жана $a>0$ болсо, $y''>0$ болот, функция иймек болот, $a<0$ болсо, $y''<0$ болот, функция томпок болот, ийилүү чекити болбойт. $-\frac{b}{6a}=0$ $(b=0)$ болсо, $x=0$ болгондо $y''=0$ болот. Бул учурда $x\neq0$ болгондо, $a>0$ болсо, $y''>0$ болот, функция иймек болот. $a<0$ болгондо, $y''<0$ болот, функция томпок болот, ийилүү чекити жок болот.

6) $$\lim_{x\to\pm\infty}(ax^4 + bx^2 + c) = \lim_{x\to\pm\infty,} ax^4\left(1 + \frac{b}{ax^2} + \frac{c}{ax^4}\right) =$$
$$= \begin{cases} +\infty, & \text{эгер } a>0 \text{ болсо,} \\ -\infty, & \text{эгер } a<0 \text{ болсо.} \end{cases}$$

7) «4» жана «6» касиеттин негизинде функциянын маанилеринин областы: а) $b<0$, эгерде $a>0$ болсо, $\left[-\frac{b^2-4ac}{4a}, +\infty\right)$, эгерде $a<0$ болсо, $\left(-\infty, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right]$ аралыктары болот.

б) $b>0$, эгерде $a>0$ болсо, $[c, +\infty)$. Эгерде $a<0$ болсо, $(-\infty, c]$ аралыктары болот.

8) «7» нин негизинде функциянын эң чоң жана эң кичине мааниси жөнүндө өзүңөр корутунду жасагыла.

9) Функциянын чектелген, чектелбегени жөнүндө өзүңөр жыйынтык чыгаргыла.

10) Функциянын нөлү жана белгилеринин турактуу аралыктары. Функциянын нөлдөрү $x = \pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$ формуласы менен табылат. $a>0$ деп алсак, жалпылык бузулбайт.

I. $b\neq0$.

1) $c<0$, анда $b^2-4ac>0$. Бул учурда ay^2+by+c жардамчы квадраттык үч мүчөсүнүн ар түрдүү белгидеги эки чыныгы нөлү болот, анда биквадраттык үч мүчөнүн 2 ар түрдүү чыныгы, 2 тутумдаш таза мнимый нөлдөрү болот.

2) $c=0, b^2-4\,ac>0$ болот, жардамчы квадраттык функция ay^2+by түрүндө болот, мындан $y=x^2=0$ жана $y=x^2=-\frac{b}{a}$. а) Эгер, $b<0$ болсо, биквадраттык үч мүчөнүн эки эселүү нөлгө барабар, эки ар түрдүү чыныгы нөлү болот. б) Эгер $b>0$ болсо, эки эселүү нөлгө барабар, эки тутумдаш таза мнимый нөлү болот.

3) $c>0$; а) $b^2-4ac>0$.

1) Эгер $b<0$ болсо, жардамчы квадрат үч мүчөнүн эки оң нөлү болот, демек, биквадраттык үч мүчөнүн 4 ар түрдүү чыныгы нөлдөрү болот.

2) Эгер $b>0$ болсо, жардамчы квадрат үч мүчөнүн эки терс нөлдөрү болот, анда биквадраттык үч мүчөнүн 4 нөлү тең мнимый болот.

б) $b^2-4ac=0$.

1) Эгер $b<0$ болсо, жардамчы квадраттык үч мүчөнүн эки барабар оң нөлү болот, биквадраттык үч мүчөнүн 2 түгөй чыныгы барабар нөлдөрү болот.

2) Эгер $b>0$ болсо, жардамчы квадраттык үч мүчөнүн эки барабар терс нөлдөрү болот да, биквадраттык үч мүчөнүн 4 нөлү тең мнимый болот.

в) $b^2-4ac<0$, $b\neq 0$, бардык 4 нөлдөрү мнимый болот.

II. $b=0$. Анда $x=\pm\sqrt[4]{-\frac{c}{a}}$ болот.

а) $c<0$ болсо, 2 чыныгы, 2 мнимый нөлдөрү болот.

б) $c=0$ болсо, бардык нөлдөрү нөлгө барабар болот.

в) $c>0$ болсо, бардык нөлдөрү мнимый болот.

Белгилеринин туруктуу аралыктары. Биз бул касиетке изилдөөнү, ыңгайлуулукка карап жогорудагы биквадраттык үч мүчөнүн нөлдөрүнө изилдеген тартипте жүргүзмөкчүбүз. x_1, x_2, x_3, x_4— биквадраттык үч мүчөнүн нөлдөрү, $a>0$ болсун.

I$_1$. Биквадраттык үч мүчө бул учурда $y=a(x-x_1)\times \times(x-x_2)\ (x^2+px+q)$ түрүндө жазылат, мында x^2+px+q нун нөлдөрү мнимый болот. Мейли $x_1<x_2$ болсун, эгер $-\infty<x<x_1$, $x_2<x<+\infty$ болсо, $y>0$; $x_1<x<x_2$ болсо, $y<0$ болорун көрсөтүү кыйын эмес.

I$_{2a}$. Бул учурда биквадраттык үч мүчө $y=ax^2\ (x-x_1)\times \times(x-x_2)$ түрүндө көрсөтүлө алат. Мында мейли $x_1<x_2$ болсун. Анда $x_1<0$, $x_2>0$, $|x_1|=x_2$ болот. $-\infty<x<x_1$; $x_2<$

$<x<+\infty$ де $y>0$ болот. $x_1<x<0$, $0<x<x_2$, $y<0$ болот.

$I_{2б}$. Биквадраттык үч мүчө $y=ax^2\ (x^2+px+q)$ түрүндө болот. x^2+px+q чыныгы нөлдөрү жок. $x\neq 0$ болгондо, дайыма $y>0$.

$I_{3а}$. Үч мүчөнү $y=a\ (x-x_1)\ (x-x_2)\ (x-x_3)\ (x-x_4)$ түрүндө көрсөтүүгө болот. Мында $x_1<x_2<x_3<x_4$ болсун.

$-\infty<x<x_1$ болсо, $y>0$ болот, $x_1<x<x_2$ болсо, $y<0$ болот.

$x_2<x<x_3$ болсо, $y>0$ болот, $x_3<x<x_4$ болсо, $y<0$ болот.

$x_4<x<+\infty$ болсо, $y>0$ болот. Буларды өзүңөр негиздегиле.

$I_{3а2}$. Биквадраттык үч мүчө $y=a\ (x^2+px+q)\ (x^2+p_1x+q_1)$. Квадрат үч мүчөлөрдүн чыныгы нөлдөрү жок. Бул учурда $(-\infty, +\infty)$ аралыгында $y>0$ болору көрүнүп турат.

$I_{3б1}$. Биквадраттык үч мүчө бул учурда $y=a\ (x-x_1)^2\times(x-x_2)^2$ түрүндө көрсөтүлөт. $x_1<0$, $x_2>0$, $|x_1|=x_2$ болот. $x\neq x_1$, $x\neq x_2$ болгондо, дайыма $y>0$ болот.

$I_{3б2}$. Бул учурда так эле $I_{3а2}$ учурдагыдай болот.

$I_{3в}$. Бул учурда да так эле $I_{3а}$ учурдагыдай болот.

$II_а$. Биквадраттык үч мүчө $y=a\ (x-x_1)\ (x-x_2)\ (x^2+px+q)$ түрүндө көрсөтүлө алат. Мында оң жактагы квадраттык үч мүчөнүн чыныгы нөлдөрү жок. $x_1<0$, $x_2>0$, $|x_1|=x_2$; $-\infty<x<x_1$, $x_2<x<+\infty$ болгондо, $y>0$; $x<x<x_2$ болгондо, $y<0$ болот.

$II_б$. Үч мүчө $y=ax^4$ түрүнө келет. $x=0$ болгондо, $y>0$ болот.

$II_в$. Бул учурда так эле $I_{3а2}$ учурундагыдай болот. Эгер $a<0$ болсо, биквадраттык үч мүчөнүн белгилери жогоруда айтылган аралыктарда тиешелүү түрдө карама-каршы болот.

11) Биквадраттык үч мүчөнүн асимптоталары жок экендигин текшергиле.

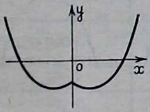
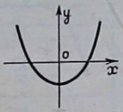
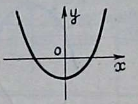
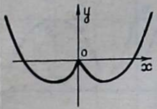
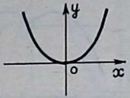
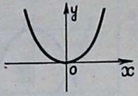
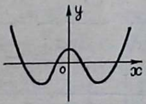
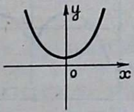
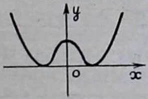
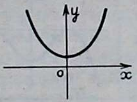
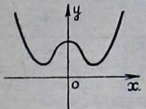
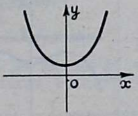
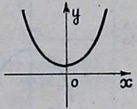
12) Бул функциянын графиги (43-чийме).

Биквадраттык үч мүчөнүн графигин жогоркудай ар тараптан терең изилдебей, тиешелүү жөнөкөй функциянын графигин алдын ала түзүп алып, аны жөнөкөй өзгөртүп түзүү жолу менен да табууга болорун айта кетүү керек. Бул максатта биквадраттык үч мүчөнү

$$y=\frac{b^2}{a}\left(\frac{a^2}{b^2}x^4+\frac{a}{b}x^2\right)+c=\frac{b^2}{a}\left[\left(\frac{x}{\sqrt{\left|\frac{b}{a}\right|}}\right)^4\pm\left(\frac{x}{\sqrt{\left|\frac{b}{a}\right|}}\right)^2\right]+c$$

$y = ax^4 + bx^2 + c$

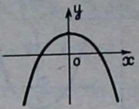
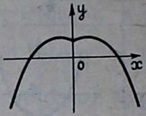
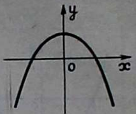
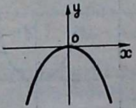
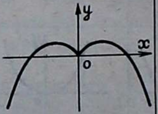
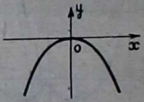
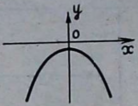
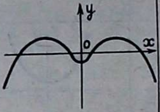
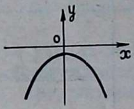
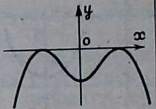
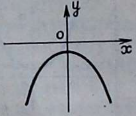
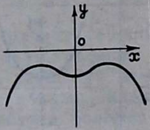
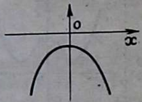
$a > 0$

c, h	$b<0$	$b>0$	$b=0$
$c<0$ $h>0$			
$c=0$ $h>0$			
$c>0$ $h>0$			—
$c>0$ $h=0$			—
$c>0$ $h<0$			

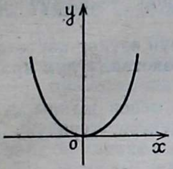
43-чийме

ФУНКЦИЯСЫНЫН ГРАФИГИ $h=b^2-4ac$

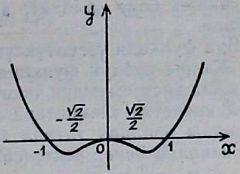
$a<0$

c, h	$b<0$	$b>0$	$b=0$
$c>0$ $h>0$			
$c=0$ $h>0$			
$c<0$ $h>0$			—
$c<0$ $h=0$			—
$c<0$ $h<0$			

түрүнө келтирип алабыз. Мындан, эгер $b=0$ болсо, биквадраттык үч мүчөнүн графиги $y=x^4+x^2$ тын (44-чийме) же $y=x^4-x^2$ тын (45-чийме) графигин координаталык октORун экөөнүн тең багыты боюнча созуудан жана ордината огу боюнча параллель которуудан (эгер $a<0$ болсо, анда дагы абсцисса огуна карата чагылдыруу менен) алынары көрүнүп турат. Эгер $b=0$ болсо, анда $y=ax^4+bx^2+c$ нын графиги $y=x^4$ графигинен алынат. $y=x^4+x^2$ түрүндөгү функциялардын графигин түзгөндө, графиктерди кошуу операциясын колдонсо да болот.



44-чийме



45-чийме

Мейли $y=f(x)+\varphi(x)$ функциясынын графигин түзүү керек дейли. Адегенде бир эле чиймеге $f(x)$ жана $\varphi(x)$ функцияларынын графиктерин өз алдынча жардамчы графиктер катарында пунктир сызыктары менен чийип алабыз. Андан кийин булардын бирдей абсциссага ээ болгон ординаталарынын алгебралык суммаларын таап, тиешелүү чекиттерди чиймеден белгилейбиз. Ошентип жетиштүү сандагы чекиттер табылганда аларды өз ара сызык менен туташтырып, изделген графикти табабыз.

$y=f(x)-\varphi(x)$ функциясынын графигин издөө, аны $y=f(x)+[-\varphi(x)]$ түрүндө жазууга боло тургандыктан, жогорку эле учурга келтирилет.

Суроолор

1. Биквадраттык үч мүчө деп кандай функцияны айтабыз?
2. Биквадраттык үч мүчөнүн монотондуулук жана экстремумдук касиеттерин айтып бергиле.
3. Бул функциянын томпоктугу, ийилиги жана ийилүү чекиттери жөнүндө эмнени айтууга болот?
4. Бул үч мүчөнүн нөлдөрү жөнүндө эмне айта аласыңар?
5. Биквадраттык үч мүчөнүн белгилеринин турактуу аралыктары жөнүндө айтып бергиле.
6. Бул функциянын маанилеринин областы жөнүндө эмне айтууга болот.
7. Биквадраттык үч мүчөнүн графигин бардык учурлар үчүн түзүп, таблица түрүндө жайлаштыргыла.

8. Биквадраттык үч мүчөнүн графигин терең изилдөө жүргүзбөй туруп, кантип сызып алууга болот?

9. $y=f(x)\pm\varphi(x)$ түрүндөгү функциянын графигин кантип сызып алууга болот?

4. Кубдук функциянын жалпы түрү. $y=ax^3+bx^2+cx+d$ түрүндөгү функция кубдук функциянын жалпы түрү же кубдук көп мүчө деп аталат. Мында x — аргумент, a, b, c — берилген чыныгы сандар болушат жана $a\neq 0$.

1. Бул функциянын аныкталуу областы $(-\infty, +\infty)$ аралыгы болот.

2. Жалпы кубдук функция жалпы учурда жуп да, так да функция боло албайт, ага өзүңөр текшерүү менен ишенгиле.

3. Бул функция үзгүлтүксүз болорун өзүңөр көрсөткүлө.

4. Жалпы кубдук функциянын монотондуулук аралыктары жана экстремумдук чекиттери.

Бул касиетке элементардык жол менен жалпы кубдук функцияны изилдөө татаал болгондуктан, туундуну колдонуп изилдөө менен чектелебиз.

$y'=3ax^2+2bx+c$, $3ax^2+2bx+c=0$;

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-3ac}}{3a}.$$

Биз $a>0$ болсун дейли.

1) $b^2-3ac>0$ жана $x_1<x_2$ болсун. $(-\infty, x_1)$ $(x_2, +\infty)$ аралыктарында $y'>0$ болот, функция өсөт. (x_1, x_2) аралыктарында $y<0$ болот, функция кемийт. Демек, x_2—минимум, x_1—максимум чекиттери болушат.

2) $b^2-3ac=0$, анда функциянын 1-туундусунун эки эселүү бир чыныгы x_1 нөлү болот. $x\neq x_1$ болгондо, дайыма $y'>0$. Демек, функция дайыма өсүүчү; экстремалдык чекити жок болот.

3) $b^2-3ac<0$. Бул учурда туундунун эки нөлү тең мнимый болот жана дайыма $y'>0$ болот. Демек, функция дайыма өсүүчү болуп, экстремалдык чекиттери жок болот. Эгер $a<0$ болсо, жогорку айтылгандардын баары тескерисинче болот.

5. Функциянын томпоктугу, ийметиги жана ийилүү чекиттери.

Биз мында да туундуну колдонуп изилдөө менен чектелебиз. $y\ =6ax+2b+6a\left(x+\frac{b}{3a}\right)$; $x=-\frac{b}{3a}$ болгондо, $y''=0$ болот. $a>0$ болсун. $\left(-\infty, -\frac{b}{3a}\right)$ аралыгында $y''<0$, функция томпок болот. $\left(-\frac{b}{3a},\ +\infty\right)$ аралыгында $y''>0$, функция иймек болот. $x=-\frac{b}{3a}$ ийилүү чекити болот. Эгер $a<0$ болсо, жогорку айтылгандар тескерисинче болот.

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax^3+bx^2+cx+d)=\lim\limits_{x\to+\infty}ax^3\Big(1+\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{x}+\frac{c}{a}\cdot\frac{1}{x^2}+$
$+\frac{d}{ax^3}\Big)=\begin{cases}+\infty, & \text{эгер } a>0 \text{ болсо,}\\ -\infty, & \text{эгер } a<0 \text{ болсо.}\end{cases}$

Демек $\lim\limits_{x\to-\infty}(ax^3+bx^2+cx+d)=\begin{cases}-\infty, & \text{эгер } a>0 \text{ болсо,}\\ +\infty, & \text{эгер } a<0 \text{ болсо.}\end{cases}$

7. Жогорку касиеттин негизинде жалпы кубдук функциянын маанилеринин областы $(-\infty,\ +\infty)$ аралыгы болот.

8. Ушул эле касиеттин негизинде, бул функциянын эң чоң жана эң кичине мааниси жок болот.

9. Бул функция чектелбеген функция болот.

10. Жалпы кубдук функциянын нөлдөрү жана белгилеринин турактуу аралыктары жөнүндө.

$a>0$ болсун. 1) Функциянын үч нөлү тең чыныгы жана ар түрдүү болсун. Анда $y=a(x-x_1\ (x-x_2)\ (x-x_3)$ түрүндө жазууга болот. Аныктык үчүн $x_3>x_2>x_1$ болсун дейли.

$(x_3,\ +\infty)$ аралыгында $y>0$.
$(x_2,\ x_3)$ аралыгында $y<0$.
$(x_1,\ x_2)$ аралыгында $y>0$.
$(-\infty,\ x_1)$ аралыгында $y<0$ болору көрүнүп турат.

2) Функциянын үч нөлү тең чыныгы болуп, анын экөө бири бирине барабар болсун. Анда $y=a(\mathrm{x}-\mathrm{x}_1)^2(x-x_2)$ деп жазууга болот.

$x>x_2,\ x\neq x_1$ болгондо, $y>0$ болот.
$\mathrm{x}<\mathrm{x}_2,\ \mathrm{x}\neq x_1$ болгондо, $y<0$ болот.

3) Функциянын үч нөлү тең чыныгы болуп, алар бири бирине барабар болсун дейли. Анда $y=a\ (x-x_1)^3$ болот.

$x>x_1$ болсо, $y>0$ болот.
$x<x_1$ болсо, $y<0$ болот.

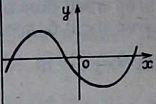
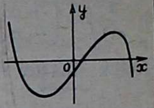
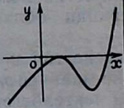
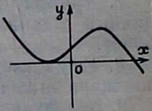
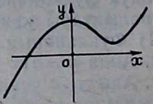
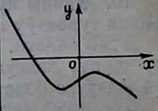
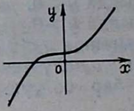
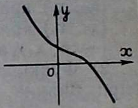
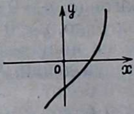
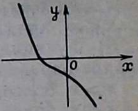
4) Бул функциянын эки нөлү мнимый болсун, анда анын сөзсүз калган бир x нөлү чыныгы болот. Бул ырастоо төмөндөгү «Бүтүн рационалдык функция» деген бөлүктө жалпы түрдө далилденет. Мында $y=a(x-x_1)\ \ (x^2+px+q)$ болот.

$(x^2+\mathrm{p}x+q)$ үч мүчөсүнүн чыныгы нөлдөрү жок. Анда $x>x_1$ болсо, $y>0$ болот. $x<x_1$ болсо, $y<0$ болот.

Эгерде $a<0$ болсо, жогоруда айтылгандардын баары тескерисинче болот.

11. Жалпы кубдук функциянын графигинин асимптоталарынын жок экенине ишенүү кыйын эмес.

12. Бул функциянын графиги (46-чийме):

Функциянын нөлдөрү	$b^2-3ac=h$	$a>0$	$a<0$
Үч ар түрдүү чыныгы нөлдөрү бар	$h>0$		
Үч чыныгы нөлдөрүнүн экөө барабар	$h>0$		
Бир, чыныгы, эки мнимый нөлү бар	$h>0$		
Үч чыныгы нөлү тең бири бирине барабар	$\ell=0$		
Бир чыныгы, эки мнимый нөлү бар	$\ell<0$		

46-чийме

Жалпы кубдук функцияны жогоркудай толук изилдебей туруп да графигин түзүп алууга болот. Тиешелүү түрдө тандалып алынган жөнөкөй функциянын графигин түзүп алып, ага карата жөнөкөй өзгөртүп түзүү эрежелерин колдонобуз. Бул максатта жалпы кубдук функциядан

a ны кашаанын сыртына чыгарабыз жана анын толук кубун бөлүп алуу менен төмөнкүдөй өзгөртүп түзөбүз:

$$y = a\left(x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}\right) = a\left(x^3 + 3\frac{b}{3a}x^3 + 3\frac{b^2}{9a^2}x + \right.$$

$$\left. + \frac{b^3}{27a^3} + \frac{c}{a}x - 3\frac{b^2}{9a^2}x - \frac{b^3}{27a^3} + \frac{d}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + \left(\frac{c}{a} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{b^2}{3a^2}\right)x + \left(\frac{d}{a} - \frac{b^2}{27a^3}\right)\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)\left(x + \frac{b}{3a}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{d}{a} - \frac{1}{3}\cdot\frac{bc}{a^2} + \frac{2b^3}{27a^3}\right)\right].$$

Кыскалык үчүн $D = \frac{c}{a} - \frac{1}{3}\frac{b^2}{a^2}$; $D' = \frac{d}{a} - \frac{1}{3}\frac{bc}{a^2} + \frac{2}{27}\cdot\frac{b^3}{a^3}$

деп, белгилеп алсак $y = a\left[\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + D\left(x + \frac{b}{3a}\right) + D'\right]$. (1)

Эгер $D \neq 0$ болсо, бул туюнтманы

$$y = a|D|^{\frac{3}{2}}\left\{\left(\frac{x + \frac{b}{3a}}{\sqrt{|D|}}\right)^3 \pm \left(\frac{x + \frac{b}{3a}}{\sqrt{|D|}}\right) + \frac{D'}{|D|^{\frac{3}{2}}}\right\} \qquad (2)$$

түрүндө өзгөртүп түзүүгө болот.
Мында $D > 0$ же $D < 0$ болушуна карап, экинчи мүчөнү $+$ же $-$ белгиси менен алуу керек.

Эгер $D = 0$ болсо, (1) формула

$$y = a\left\{\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + D'\right\} \qquad (3)$$

түрүнө келет. (2) жана (3) формулаларды кароо менен жалпы кубдук функциянын графигин

(I) $y = x^3 + x$ (47-чийме),
(II) $y = x^3 - x$ (48-чийме),
(III) $y = x^3$ (49-чийме) алабыз.

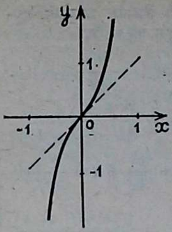
Жөнөкөй функциялардын графигин, жөнөкөй өзгөртүп түзүү менен алууга болорун көрөбүз.

а) $D \neq 0$ болсун, бул учурда изделүүчү график (I) же (II) графиктеринен ($D > 0$ же $D < 0$ болгонуна жараша) төмөнкүдөй өзгөртүп түзүүлөрүн колдонуу менен алынат:

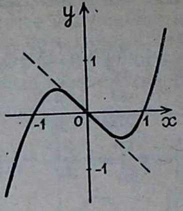
1) ox огунун багыты боюнча $\sqrt{|D|}$ ирет созуу.

2) ox огун $\left(-\frac{b}{3a}\right)$ кесиндисинчелик параллель которуу.

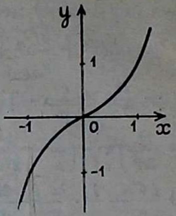
3) oy огун $\frac{D'}{|D|^{\frac{3}{2}}}$ кесиндисинчелик параллель которуу.



47-чийме



48-чийме



49-чийме

4) $|a|\,|D|^{\frac{3}{2}}$ ирет оу огу боюнча созуу жана эгер $a<0$ болсо, ох огу боюнча чагылдыруу.

б) $D=0$ болсо, изделүүчү график (III) графиктен төмөнкүдөй өзгөртүп түзүүлөрдү колдонуу менен алынат:

1) *ох* огун $\left(-\frac{b}{3a}\right)$ кесиндисинчелик параллель котоpуу.

2) *оу* огун D' кесиндисинчелик параллель котоpуу.

3) *оу* огу боюнча (a) ирет созуу жана эгер $a<0$ болсо, *оу* огу боюнча чагылдыруу.

(I) жана (II) графиктерди чийүү үчүн жогоруда айтылган графиктерди кошуу амалын колдонсо болот, (III) график болсо, жогор жакта түзүлгөн.

Суроолор

1. Жалпы кубдук функциянын аныкталуу областы кандай аралык болот?

2. Бул функциянын үзгүлтүксүздүгү жөнүндө эмне айтууга болот?

3. Бул функциянын монотондуулук аралыктары жана экстремалдык чекиттери жөнүндө айтып бергиле.

4. Жалпы кубдук функциянын томпоктугу жана иймектиги, ийилүү чекиттери жөнүндө айтып бергиле.

5. Бул функциянын нөлдөрү жөнүндө эмне билесиңер?

6. Бул функциянын белгилеринин туруктуу аралыктары жөнүндө эмне билесиңер?

7. Аргумент чексизге умтулганда, бул функция кандай өзгөрөт? Анын маанилеринин областы кандай аралык болот?

8. Бул функциянын эң чоң жана эң кичине маанилери жөнүндө, чектелбегени жөнүндө айтып бергиле.

9. Жалпы кубдук функциянын графигин ар бир учур үчүн чийип, таблица түрүндө жайгаштыргыла.

10. Бул функциянын графигин графиктерди жөнөкөй өзгөртүп түзүү жолун колдонуп кантип чийүүгө болот?

5. Бүтүн рационалдуу функциялар (жалпы учур). Биз n даражалуу бүтүн рационалдуу функцияны (аны көп мүчө же полином деп да аташат) $P_n(x)$ менен белгилейбиз. Анда $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$. Бул функцияны жалпы түрдө жогорку схема боюнча толук изилдөө өтө кыйын, ошондуктан бүтүн рационалдуу функцияны (көп мүчөнү) жалпы түрдө айрым касиеттерге карата гана изилдөө менен чектелебиз.

1. Аныкталуу областы. Каалаган чыныгы санды, натуралдык даражага көтөрүүгө, бири бирине көбөйтүүгө жана кошууга мүмкүн болгондуктан, көп мүчөнүн аныкталуу областы $(-\infty, +\infty)$ аралыгы болот.

2. Көп мүчө аргумент x тин жуп (так) даражаларын гана ичине алганда, ошондо гана жуп (так) функция болот, муну окуучулардын өзүлөрү текшерүүсүн сунуш кылабыз. Жалпы учурда көп мүчө жуп да жана так да функция боло албайт.

3. Көп мүчө үзгүлтүксүз функциялардын суммасынан тургандыктан, үзгүлтүксүз функция болот.

4, 5. Жогоруда айтылган себеп боюнча көп мүчөнү жалпы түрдө монотондуулукка, экстремалдык маанилерине, ошондой эле томпоктук, иймектикке, ийилүү чекитине карата изилдебейбиз.

6. а) $$\lim_{x\to+\infty} P_n(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{эгер } a_0>0 \text{ болсо,} \\ -\infty, & \text{эгер } a_0<0 \text{ болсо.} \end{cases} \quad (1)$$

Далилдөө

$$P_n(x) = a_0x^n\left(1+\frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{1}{x}+\frac{a_2}{a_0}\cdot\frac{1}{x^2}+...+\frac{a_n}{a_0}\cdot\frac{1}{x^n}\right) \quad (2)$$

болот жана

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{1}{x}+\frac{a_2}{a_0}\cdot\frac{1}{x^2}+...+\frac{a_n}{a_0}\cdot\frac{1}{x^n}\right)=1. \quad (3)$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty. \quad (4)$$

(2), (3) жана (4) дөн (1) келип чыгат.

б) 1) $a_0>0$ болсун.

$$\lim_{x\to-\infty} P_n(x)=\begin{cases} +\infty, & \text{эгер } n \text{ жуп сан болсо,} \\ -\infty, & \text{эгер } n \text{ так сан болсо,} \end{cases} \quad (5)$$

чындыгында да,

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{эгер } n \text{ жуп сан болсо,} \\ -\infty, & \text{эгер } n \text{ так сан болсо,} \end{cases} \quad (6)$$

Ошондуктан, (2), (3) жана (6) дан (5) келип чыгат.

2) $a_0<0$ болсун

$$\lim_{x\to-\infty} P_n(x)=\begin{cases}-\infty, & \text{эгер } n \text{ жуп сан болсо,}\\ +\infty, & \text{эгер } n \text{ так сан болсо,}\end{cases}$$

Муну «1» учурга окшоштуруп оңой эле далилдөөгө болот.

7. «6» касиеттин негизинде көп мүчөнүн маанилеринин областы төмөнкүдөй болот: n — так сан болгондо, $(-\infty, +\infty)$ аралыгы; Эгер n — жуп болуп, $a_0>0$ болсо, $[\alpha, +\infty)$ аралыгы: ал эми $a_0<0$ болсо, $(-\infty, \alpha]$ аралыгы болот. Мында α — кандайдыр бир чыныгы сан.

8. «7» касиеттин негизинде n — так сан болгондо, көп мүчөнүн эң чоң жана эң кичине маанилери жок болот. n — жуп сан болуп, $a_0>0$ болгондо, анын эң кичине мааниси бар болуп, эң чоң мааниси жок болот, ал эми $a_0<0$ болгондо, тескерисинче болот.

9. «7» касиеттин негизинде n — так сан болгондо, көп мүчө чектелбеген болот. n —жуп сан болуп, $a_0>0$ болгондо, көп мүчө төмөн жактан, ал эми $a_0<0$ болсо, жогор жактан чектелген болот.

10. Функциянын нөлү жана белгилеринин турактуу аралыктары жөнүндө. Көп мүчөнүн даражасы n канча болсо, анын ошончо нөлү болору (комплекстик жана эселүү чыныгы нөлдөрдү эсептегенде) алгебрадан белгилүү. Ошондой эле алгебрадан $n>4$ болгондо, жалпы алганда көп мүчөнүн нөлү радикалдарда чыгарылбай турганы далилденет. Практикада берилген көп мүчөнүн нөлдөрүн табуу татаал маселе болуп эсептелет.

Биз азырынча $a_0=1$ болсун дейли. Анда көп мүчө төмөнкүдөй түрдө көрсөтүлө алат: $P_n(x)=(x-\alpha)^\lambda(x-\beta)^\mu\times$ $\times(x-\gamma)^\nu\dots(x^2\cdot px+q)^\rho\dots$ Мында $\alpha, \beta\dots$ — көп мүчөнүн чыныгы ар түрдүү нөлдөрү, $\lambda, \mu\dots$ — алардын эселиги (оң бүтүн сандар) жана $x^2+px+q\dots$ түрүндөгү квадраттык үч мүчөлөр, тутумдаш мнимый нөлдөргө ээ. x^2+px+q түрүндөгү көп мүчөлөр дайыма оң белгиде болгондуктан, көп мүчөнүн белгиси $(x-\alpha)^\lambda$ түрүндөгү көбөйтүүчүлөрдүн белгисине көз каранды болот. Аныктык үчүн көп мүчөнүн нөлдөрү α, $\beta\dots$ — кемүү ирети боюнча жайланышсын дейли: $\alpha>\beta>\gamma>\dots$ Аргумент x бара бара кемүү менен $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma, \dots$ маанилери аркылуу өтөт. $x>\alpha$ болгондо, бардык көбөйтүүчүлөр оң болот, демек, $P_n(x)>0$. x аргументи α маанисинен өтөөр менен $x-\alpha<0$ болот. Бул учурда эгер λ жуп сан болсо, $(x-\alpha)^\lambda>0$, эгер так сан болсо, $(x-\alpha)^\lambda<0$ болот. Ушул сыяктуу абал x андан ары β, γ, ... маанилери аркылуу өткөндө да улантыла берет. Бул айтылгандардан көп мүчөнүн белгилеринин турактуу аралыктары жөнүндө төмөнкүдөй корутунду келип чыгат. $x>\alpha$ болгондо, $P_{\text{n}}(x)>0$ болот. $\beta<x<\alpha$, λ — жуп сан болгондо, $P_{\text{n}}(x)>0$ болот, так сан болгондо $P_{\text{n}}(x)<0$ болот. $\gamma<x<\beta$ болгондо, $P_{\text{n}}(x)$ оң же терс мааниде болору $\lambda+\mu$ суммасынын жуп же так сан болоруна жараша болот ж. б. $\lambda+\mu+\upsilon+...+2\text{P}...=n$ болгондуктан, n жуп сан болгондо, x чыныгы нөлдөрдүн ичинен чоңунан чоң, кичинесинен кичине болгондо, $P_{\text{n}}(x)>0$ болот, эгер n так сан болгондо, x чыныгы нөлдөрдүн ичинен чоңунан чоң болгондо $P_{\text{n}}(x)>0$ болот, кичинесинен кичине болгондо, $P_{\text{n}}(x)<0$ болот. Бул айтылгандар $a_0>0$ учурда да дайыма туура, $a_0<0$ болгондо, жогоруда айтылгандардын баары тескерисинче болот.

Так даражадагы чыныгы коэффициенттүү көп мүчө, жок дегенде бир чыныгы нөлгө ээ болот. Чындыгында да, аргумент $x\to+\infty$ жана $x\to-\infty$ болгондо, $P_{\text{n}}(x)$ көп мүчөсүнүн пределдеринин белгилери ар түрдүү болорун биз жогоруда көрдүк. Ошондуктан $[-N,\ N]$ кесиндисинин учтарында $P_{\text{n}}(x)$ тин мааниси түрдүү белгиде болгудай кылып, $N>0$ санын дайыма табууга болот. Демек, көп мүчө үзгүлтүксүз болгондуктан, $R_{\text{n}}(x)$ көп мүчөсү $[-N,\ N]$ кесиндисинин жок дегенде бир чекитинде нөлгө айланат. Нөл чекиттин аймагында $R_{\text{n}}(x)$ көп мүчөнүн белгиси анын кенже мүчөсүнүн[1] белгисине окшош болот. Чындыгында да, эгер $a_{\text{n}}\neq0$ болсо, $\lim\limits_{x\to0}P_n(x)=\lim\limits_{x\to0}(a_n+a_{n-1}x+...+a_0x^n)=$ $=a_n$, бул функциянын өз пределинин белгисин сактоосу жөнүндөгү теоремадан келип чыгат. Эгерде кенже мүчө $a_{\text{n}-k}x^{\text{k}}(a_{\text{n}k}\neq0)$ болсо, $P_{\text{n}}(x)=x^{\text{k}}(a_{\text{n}-k}+a_{\text{n}-k-1}x+...a_{\text{n}}x^{\text{n}-k})$ болот. Нөл чекиттин аймагында экинчи көбөйүүчүнүн белгиси $a_{\text{n-k}}$ нын белгисине окшош болгондуктан, $P_{\text{n}(x)}$ тин белгиси $a_{\text{n-k}}x^k$ нын белгисиндей болот. Бирдик эселүү нөлдөрү болгон чекиттен, көп мүчөнүн графиги Ox огун жанybастан кесет; жуп эселүү нөлдөрү болгон чекиттерде график Ox огун кеспестен жанып өтөт; үчтөн баштап так эселүү нөлдөрү болгон чекиттерде көп мүчөнүн графиги Ox огун жануу менен кесип өтөт.

11. Көп мүчөнүн үзүлүү чекиттери жок болгондуктан, анын вертикаль асимптоталары жок болот.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P_n(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+...+a_{n-1}+\frac{a_n}{x}\right)=+\infty$$

болгондуктан, көп мүчөнүн жантык асимптотасы, ошонун ичинде горизонталь асимптотасы жок болот.

---

[1] Көп мүчөдө өзгөрмөнүн эң кичине даража көрсөткүчкө ээ болгон мүчөсү.

12. Көп мүчөнүн графигин жеке учурлар үчүн гана түзүүгө болот. Ал эми биз айрым жеке учурлар үчүн көп мүчөнүн графиктерин жогоруда түзгөнбүз.

Суроолор

1. Бүтүн рационалдуу функция деп, кандай функцияларды айтабыз? Аны атоо үчүн дагы кандай терминдерди колдонушат?
2. Бул функциянын аныкталуу областы кандай аралык болот?
3. Бүтүн рационалдуу функциянын жуп, тактыгы жөнүндө эмне айтууга болот?
4. Көп мүчөнүн үзгүлтүксүз экенин далилдегиле.
5. Аргументтин мааниси чексизге умтулгандагы, көп мүчөнүн өзгөрүү мүнөзүн көрсөткүлө.
6. Бул функциянын маанилеринин областы, эң чоң жана эң кичине маанилери жөнүндө эмне айтууга болот?
7. Көп мүчөнүн нөлдөрү жөнүндө эмнени билесиңер?
8. Көп мүчөнүн белгилеринин турактуу аралыктары жөнүндө эмнелерди айтууга болот?
9. Көп мүчөнүн графигинин асимптоталарынын болушу жөнүндө эмне билесиңер?

Көнүгүүлөр

132. Алдын ала изилдөө менен төмөнкү функциялардын графиктерин түзгүлө:

1) $y=ax$; 2) $y=ax^2+c$; 3) $y=ax^2+bx$;
4) $y=ax^4+c$; 5) $y=ax^4+bx^2$; 6) $y=ax^3+b$;
7) $y=ax^3+bx$; 8) $y=ax^3+bx+c$.

133. Төмөнкү функциялардын графигин, жогоруда изилденип табылган касиеттердин негизинде түзүп, график боюнча касиеттерин айтып бергиле:

1) $y=-\frac{1}{3}x-2$. 2) $y=2x^2-8x+11$.
3) $y=2x^3-10x^2+16x-12$. 4) $y=3x^4-15x^2+12$.

134. Төмөнкү функциялардын графиктерин, графиктерди жөнөкөй өзгөртүп түзүү жолун колдонуп түзгүлө:

1) $y=2x^4-10x^2+8$. 2) $y=x^3-6x^2+11x-6$.

§ 17. ТЕРС БҮТҮН КӨРСӨТКҮЧТҮҮ ДАРАЖАЛУУ ФУНКЦИЯЛАР

$y=x^{-m}$ түрүндөгү функциялар терс бүтүн көрсөткүчтүү функциялар деп аталат. Мында m натуралдык сан, x аргумент болот. Аныктама негизинде $x^{-m}=\frac{1}{x^m}$ болот. Демек, терс бүтүн көрсөткүчтүү даражалуу функциялар, бөлчөктүү рационалдуу функциялардын эң жөнөкөй жекече учурлары болот.

1. Аныкталуу областы. Санды нөлгө бөлүүгө болбогондуктан бул функциянын аныкталуу областы нөлдөн башка бардык чыныгы сандардын көптүгү, б. а. $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ аралыктары болот.

2. Бул функция m жуп сан болсо, жуп функция, m так сан болсо, так функция болот. Аны текшерип көрүү окуучуларга сунуш кылынат.

3. Бул функция үзгүлтүксүз функциялардын катышы болуп жаткандыктан, өзүнүн аныкталуу областында үзгүлтүксүз болот.

4. Функциянын монотондуулук аралыктары, экстремалдык чекиттери.

Элементардык жолду колдонуп, изилдөө. а) m так сан болсун. $x_2 > x_1$, анда $x_2^m > x_1^m$ жана $\frac{1}{x_2^m} < \frac{1}{x_1^m}$, б. а. $y_2 < y_1$ функция, бардык аныкталуу областында кемүүчү болот. б) m жуп болсун, $x_1 < x_2 < 0$ болсун, анда $x_1^m > x_2^m > 0$ болот. Демек, $\frac{1}{x_1^m} < \frac{1}{x_2^m}$ функция, $(-\infty, 0)$ аралыгында өсүүчү болот. $y = x^{-m}$ функциясы жуп болгондуктан, жуп функциянын монотондуулугу жөнүндөгү теореманын негизинде, бул функция $(0, +\infty)$ аралыгында кемүүчү болот. Бул айтылгандардан берилген функциянын экстремалдык чекиттери жок экени келип чыгат.

Туундуну колдонуп изилдөө. $y' = -\frac{m}{x^{m+1}}$; $-\frac{m}{x^{m+1}} = 0$, $x \neq 0$. Функциянын аныкталуу областынан алынган бир да чекитте, биринчи туунду нөлгө айланбайт жана маанисин жоготпойт, анын бир да кризистик чекити жок, демек, экстремалдык чекити жок. а) $m+1$ жуп сан болсун, анда m так сан болот. Бул учурда $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ аралыгында $y' < 0$ болуп, функция кемүүчү болот. б) $m+1$ так сан болсун, анда m жуп сан болот. $(-\infty, 0)$ аралыгында $y' > 0$ болуп, функция өсүүчү болот, $(0, +\infty)$ аралыгында $y' < 0$ болуп, функция кемүүчү болот.

5. Функциянын томпоктугу, ийметиги жана ийилүү чекиттери. Элементардык жолду колдонуп изилдөө бир топ татаал болгондуктан, туундуну колдонуп изилдөө менен чектелебиз.

$y'' = \frac{m(m+1)}{x^{m+2}}$; $x \neq 0$ функциянын аныкталуу областынан алынган бир да чекитте 2-туунду нөлгө айланбайт жана маанисин жоготпойт, демек, ийилүү чекити жок. m жуп сан болгондо, $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ аралыктарында $y''>0$ болуп, функция иймек болот. m так сан болгондо, $(-\infty, 0)$ аралыгында $y''<0$ болуп, функция томпок болот, $(0, +\infty)$ аралыгында $y''>0$ болуп, функция иймек болот.

6. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^{-m} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^m} = 0$ болот, себеби $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^m = \pm\infty$

Бул функциянын $x=0$ болгон экинчи түрдөгү үзүлүү чекити бар. Бул чекиттин аймагында функциянын өзгөрүшүн изилдөө керек, б. а. бул функциянын $x=0$ чекитиндеги эки бир жактуу пределдерин кароо керек.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{-m} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^m} = +\infty; \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x^{-m} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^m} = \begin{cases} +\infty, \text{ эгер } m \text{ жуп сан болсо,} \\ -\infty, \text{ эгер } m \text{ так сан болсо,} \end{cases}$$

7. Азыр эле далилденген касиеттердин негизинде m жуп сан болгондо, функциянын маанилеринин областы $(0, +\infty)$ аралыгы болот. Эгер m так сан болсо, $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ аралыктары болот.

8. Жогорудагы эле далилденген касиеттин негизинде, функциянын эң чоң жана эң кичине маанилери жок болот.

9. Ошол эле «7» касиеттин негизинде: m жуп сан болгондо, функция төмөн жактан нөл менен чектелип, жогор жактан чектелбейт. m так сан болсун. $(-\infty, 0)$ аралыгында жогор жактан нөл менен чектелет, төмөн жактан чектелбейт, ал эми $(0, +\infty)$ аралыгында төмөн жактан нөл менен чектелип, жогор жактан чектелбейт.

10. Функциянын нөлү жок экени көрүнүп турат. «7» касиеттин негизинде m жуп сан болгондо, дайыма $y>0$, m так сан болгондо, $(-\infty, 0)$ аралыгында $y<0$, ал эми $(0, +\infty)$ аралыгында $y>0$ болот.

11. Функциянын графигинин асимптоталары

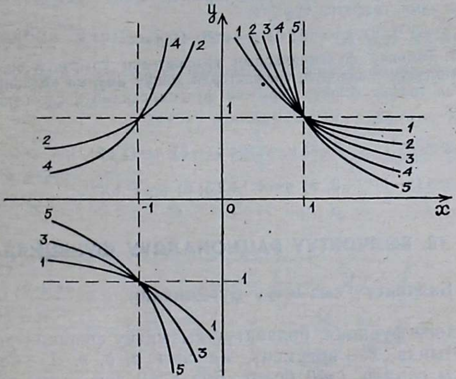
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x^m}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^{m+1}} = 0. \quad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{x^m} - 0\right) = 0$$ болгондуктан, $y=0$ сызыгы, башкача айтканда Ox огу функциянын горизонталь асимптотасы болот. «6» касиеттин негизинде $x=0$ сызыгы, б. а. Oy огу функциянын вертикаль асимптотасы болот.

12. **Функциянын графиги.** Эгерде $1<x$ болсо, $x<x^2<$ $<x^3<\ldots<x^m<\ldots$ болот. Эгерде $0<x<1$ болсо, $x>x^2>$ $>x^3>\ldots>x^m>\ldots$ болот. Анда, эгерде $1<x$ болсо $\frac{1}{x}>\frac{1}{x^2}>\frac{1}{x^3}>\ldots>\frac{1}{x^m}>\ldots$ болот.

Эгерде $0<x<1$ болсо, $\frac{1}{x}<\frac{1}{x^2}<\frac{1}{x^3}<\ldots<\frac{1}{x^m}<\ldots$ болот.

Ошентип, $1<x$ болгондо, y_m ийри сызыгы y_{m+1} ийри сызыгынын үстүндө жатат, б. а. даража көрсөткүчү чоңу даража көрсөткүчү кичиненин үстүндө жатат. $0<x<1$ болгондо, y_m ийри сызыгы y_{m+1} ийри сызыгынын астында жатат, б. а. даража көрсөткүчү чоңу астында жатат. Ушуларды эске алуу менен бир чиймеге: 1) $y=x^{-1}=\frac{1}{x}$; 2) $y=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$; 3) $y=x^{-3}=\frac{1}{x^3}$; 4) $y=x^{-4}=\frac{1}{x^4}$; 5) $y=x^{-5}=\frac{1}{x^5}$ функцияларынын графиктерин түзөбүз. Бардык графиктер (1, 1) чекити аркылуу өтөт (50-чийме).



50-чийме

Суроолор

1. Терс бүтүн көрсөткүчтүү даражалуу функция деп, кандай функцияны айтабыз?

2. Анын аныкталуу областы кандай аралык болот?

3. Ал функциянын жуп, тактыгы жөнүндө эмне айтууга болот?

4. Терс бүтүн көрсөткүчтүү функциянын үзгүлтүксүздүгү жөнүндө эмне билесиңер?

5. Бул функциянын монотондуулугу, экстремалдык чекиттери жөнүндө айтып бергиле.

6. Бул функциянын томпоктугу, ийилигиги, ийилүү чекиттери жөнүндө эмне айтууга болот?

7. Берилген функциянын аргументи чексизге умтулгандыгы жана 2-тартиптеги үзүлүү чекитинин аймагындагы өзгөрүү мүнөзүн айтып бергиле.

8. Бул функциянын маанилеринин областы, чектелген, чектелбегендиги жөнүндө эмне айта аласыңар?

9. Бул функциянын нөлү, белгилеринин туруктуу аралыктары жөнүндө эмне айтууга болот?

10. Берилген функциянын графигинин асимптоталары кандай түз сызыктар болушат?

11. Бул функциянын бир нече жеке учурлары үчүн графикти айрым чиймелерге, анан бир чиймеге чийип, алардын жайлануу абалын түшүндүргүлө.

Көнүгүүлөр

135. Жогоруда изилденип табылган касиеттер боюнча төмөнкү функциялардын графиктерин түзгүлө:

1) $y=x^{-10}$; 2) $y=x^{-17}$; 3) $y=x^{-208}$; 4) $y=x^{-65}$.

136. Төмөнкү функцияларды берилген схема боюнча алдын ала изилдеп алып, графигин түзгүлө:

1) $y=x^{-14}$; 2) $y=x^{-27}$; 3) $y=x^{-32}$; 4) $y=x^{-47}$.

137. Төмөнкү функциялардын графиктерин графиктерди жөнөкөй өзгөртүп түзүү жолдорун, графиктерди кошуу амалын колдонуп түзүп, табылган график боюнча берилген функциялардын касиеттерин айтып бергиле:

1) $y=2x^{-1}$; 2) $y=\frac{1}{3}x^{-3}$; 3) $y=(x+2)^{-2}$;

4) $y=(x-1)^{-1}+3$; 5) $y=x^{-4}+2{,}5$; 6) $y=x^2+x^{-1}$.

§ 18. БӨЛЧӨКТҮҮ РАЦИОНАЛДУУ ФУНКЦИЯЛАР

1. Бөлчөктүү сызыктуу функциялар. $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ бөлчөк түрүндөгү функция, бөлчөктүү сызыктуу функция деп аталат. Мында x — аргумент, ал эми a, b, c, d — берилген чыныгы сандар, $c\neq 0$ болот. Биз $c>0$ деп алсак да, жалпылык бузулбайт, $c<0$ болгон учурда да бөлчөктүн алымын, бөлүмүн — 1 ге көбөйтүү менен $c>0$ болгон абалга жетет элек.

Бөлчөктүү сызыктуу функция бөлчөктүү рационалдуу функциянын жекече учуру болот. Эгер $a=0$, $d=0$, $c=b=1$

болсо, болот эле. Бул функцияны берилген схема боюнча изилдөөгө киришебиз.

1. Бул функциянын аныкталуу областы $cx+d\neq 0$ болгон, б. а. $x\neq\frac{d}{c}$ болгон бардык чыныгы сандардын көптүгүнөн, демек, $\left(-\infty,-\frac{d}{c}\right)$, $\left(-\frac{d}{c},+\infty\right)$ аралыктарынан турары көрүнүп турат.

2. Берилген функция жалпы учурда жуп да, так да функция эмес экенине өзүңөр текшерүү менен ишенгиле.

3. Бул функция үзгүлтүксүз функциялардын катышынан тургандыктан, өзүнүн аныкталуу областында үзгүлтүксүз болот.

4. Функциянын монотондуулук аралыктары, экстремалдык чекиттери.

Элементардык жолду колдонуп изилдөө.

Адегенде алымын бөлүмүнө бөлүү менен берилген функцияны $y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}-\frac{ad-bc}{c^2\left(x+\frac{d}{c}\right)}$ түрүндө өзгөртүп түзүп алабыз. Дайыма $ad-bc\neq 0$ болот. Эгерде $ad=bc=0$ болуп калса, $y=\frac{a}{c}$ болуп, дайыма турактуу санга барабар болуп, $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ бөлчөгү кыскартылуучу бөлчөк болуп калаар эле, ал эми бул болсо, бөлчөктүн кыскарбас бөлүү шартына каршы келет.

а) $ad-bc>0$ болсун. $x_2>x_1$ болгондо, $x_2+\frac{d}{c}>x_1+\frac{d}{c}$,

$$c^2\left(x_2+\frac{d}{c}\right)>c^2\left(x_1+\frac{d}{c}\right),\ \frac{ad-bc}{c^2\left(x_2+\frac{d}{c}\right)}<\frac{ad-bc}{c^2\left(x_1+\frac{d}{c}\right)},$$

$$-\frac{ad-bc}{c^2\left(x_2+\frac{d}{c}\right)}>-\frac{ad-bc}{c^2\left(x_1+\frac{d}{c}\right)},\ \frac{a}{c}-\frac{ad-bc}{c^2\left(x^2+\frac{d}{c}\right)}>$$

$>\frac{a}{c}-\frac{ad-bc}{c^2\left(x_1+\frac{d}{c}\right)}$ болот, демек, $y_2>y_1$. Бул учурда функция өсүүчү болот.

б) $ad-bc<0$ болгондо, функция кемүүчү болорун жогоркуга окшоштуруп, өзүңөр далилдегиле.

Бул айтылгандардан функциянын экстремалдык чекиттери жок экени келип чыгат.

Туундуну колдонуп изилдөө.

$$y' = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2};$$

$(cx+d)^2 > 0$, ал эми $ad - bc \neq 0$ болорун жогоруда көрдүк. Демек, $y' \neq 0$. Эгер $ad - bc > 0$ болсо, $y' > 0$ болот да, функция өсүүчү болот. Эгер $ad - bc < 0$ болсо, $y' < 0$ болот да, функция кемүүчү болот. Демек, функциянын экстремалдык чекиттери жок болот.

5. **Функциянын томпоктугу, ийметиги жана ийилүү чекиттери. Элементардык жолду колдонуп изилдөө.**

Функциянын $y = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c^2\left(x+\frac{d}{c}\right)}$ түрүндө көрсөтүлүшүн пайдаланабыз.

$$A = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \frac{a}{2c} - \frac{ad-bc}{2c^2\left(x_1+\frac{d}{c}\right)} +$$

$$+\frac{a}{2c} - \frac{ad-bc}{2c^2\left(x^2+\frac{d}{c}\right)} - \frac{a}{c} + \frac{ad-bc}{c^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{d}{c}\right)} =$$

$$= -\frac{ad-bc}{2c^2}\left(\frac{1}{x_1+\frac{d}{c}} + \frac{1}{x_2+\frac{d}{c}} - \frac{4}{x_1+x_2+\frac{2d}{c}}\right) =$$

$$= \frac{-(ad-bc)^2\left(x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2\frac{d}{c} + x_1\frac{d}{c} + x_2\frac{d}{c} + 2\frac{d^2}{c^2} + x_1^2 + x_1x_2 + 2x_1\frac{d}{c} + x_1\frac{d}{c} + x_2\frac{d}{c} + 2\frac{d^2}{c^2} - 4x_1x_2 - 4x_2\frac{d}{c} - 4x_1\frac{d}{c} - 4\frac{d^2}{c^2}\right.}{2c^2\left(x_1+\frac{d}{c}\right)\left(x_2+\frac{d}{c}\right)\left(x_1+\frac{d}{c}+x_2+\frac{d}{c}\right)} =$$

$$= \frac{-(ad-bc)\left(-2x_1x_2 + x_2^2 + x_1^2\right)}{2c^2\left(x_1+\frac{d}{c}\right)\left(x_2+\frac{d}{c}\right)\left(x_1+\frac{d}{c}+x_2+\frac{d}{c}\right)} =$$

$$= -\frac{(ad-bc)(x_2-x_1)^2}{2c^2\left(x_1+\frac{d}{c}\right)\left(x_2+\frac{d}{c}\right)\left(x_1+\frac{d}{c}+x_2+\frac{d}{c}\right)};$$

$ad-bc\neq 0$ болорун жогоруда көрдүк. $x_2\neq x_1$ болгондуктан, $(x_2-x_1)^2>0$ болот.

а) $x>-\frac{d}{c}$ болсун. 1) $ad-bc>0$ болсо, $A<0$ болот, функция томпок болот. 2) $ad-bc<0$ болсо, $A>0$ болот, функция иймек болот. б) $x<-\frac{d}{c}$ болсун. 1) $ad-bc>0$ болсо, $A>0$ болот, функция иймек болот. 2) $ad-bc<0$ болсо, $A<0$ болот, функция томпок болот. Бул айтылгандардан функциянын графигинин ийилүү чекити жок экени көрүнүп турат.

Туундуну колдонуп изилдөө.

$y''=-\frac{2c(ad-bc)}{(cx+d)^3}=\frac{-2(ad-bc)}{c^2\left(x+\frac{d}{c}\right)^3}$; а) $x>-\frac{d}{c}$ болсун, анда $\left(x+\frac{d}{c}\right)^3>0$ болот. Эгер $ad-bc>0$ болсо, $y''<0$ болот, функция томпок болот. Эгер $ad-bc<0$ болсо, $y''>0$ болот, функция иймек болот. б) $x<-\frac{d}{c}$ болсун, анда $\left(x+\frac{d}{c}\right)^3<0$ болот.

Эгер $ad-bc>0$ болсо, $y''>0$ болот, функция иймек болот.

Эгер $ad-bc<0$ болсо, $y''<0$ болот, функция томпок болот. Экинчи туунду функциянын аныкталуу областынан алынган x тин бир да маанисинде нөлгө айланбайт же маанисин жоготпойт, ошондуктан анын графигинин ийилүү чекити болбойт.

6. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}}=\frac{a}{c}$; $x=-\frac{d}{c}$ функциянын экинчи түрдөгү үзүлүү чекити болот, анын аймагында функциянын өзгөрүүсүн изилдейбиз.

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{ax+b}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}=\frac{1}{x+\frac{d}{c}}\cdot\frac{ax+b}{c}=\frac{1}{x+\frac{d}{c}}\cdot R_1(x). \quad (1)$$

$\frac{ax+b}{c}=R_1(x)$ деп белгиледик.

$$\lim_{x\to -\frac{d}{c}} R_1(x)=\frac{a\left(-\frac{d}{c}\right)+b}{c}=\frac{ad-cb}{c^2}=R_1\left(-\frac{d}{c}\right). \qquad (2)$$

$ad-cb>0$ болсо, $R_1\left(-\frac{d}{c}\right)<0$ болот. $ad-cb<0$ болсо, $R_1\left(-\frac{d}{c}\right)>0$ болот. (1) жана (2) нин негизинде:

$$\text{а) } \lim_{x\to -\frac{d}{c}} y=\begin{cases} -\infty, \text{ эгер} R_1\left(-\frac{d}{c}\right)>0 \text{ болсо } (ad-bc<0 \text{ болот}), \\ +\infty, \text{ эгер } R_1\left(-\frac{d}{c}\right)<0 \text{ болсо } (ad-bc>0 \text{ болот}). \end{cases}$$

$$\text{б) } \lim_{\substack{x\to \frac{d}{c} \\ x>-\frac{d}{c}}} y=\begin{cases} +\infty, \text{ эгер} R_1\left(-\frac{d}{c}\right)>0 \text{ болсо } (ad-bc<0 \text{ болот}), \\ -\infty, \text{ эгер} R_1\left(-\frac{d}{c}\right)<0 \text{ болсо } (ad-bc>0 \text{ болот}). \end{cases}$$

7. Функциянын маанилеринин областы жогорку «6» касиеттин негизинде төмөнкүдөй болот.

а) $x>-\frac{d}{c}$ жана $ad-bc>0$ болгондо, $-\infty<y<\frac{a}{c}$ болот. $ad-bc<0$ болгондо, $\frac{a}{c}<y<+\infty$ болот.

б) $x<-\frac{d}{c}$ жана $ad-bc>0$ болгондо, $\frac{a}{c}<y<+\infty$ болот. $x>-\frac{d}{c}$ жана $ad-bc<0$ болгондо, $-\infty<y<\frac{a}{c}$ болот.

8. Функциянын эң чоң жана эң кичине мааниси жок болору көрүнүп турат.

9. «7» касиеттин негизинде функциянын чектелген, чектелбегени мындай болот. а) $x>-\frac{d}{c}$ жана $ad-bc>0$ болгондо, функция төмөн жактан чектелбейт, жогор жактан $\frac{a}{c}$ менен чектелет. Эгер $ad-bc<0$ болсо, төмөн жактан $\frac{a}{c}$ менен чектелет, жогор жактан чектелбейт. б) $x<-\frac{d}{c}$ жана $ad-bc>0$ болсо, функция жогор жактан чектелбейт,

төмөн жактан $\frac{a}{c}$ менен чектелет. Эгер $ad-bc<0$ болсо, жогор жактан $\frac{a}{c}$ менен чектелет, төмөн жактан чектелбейт.

10. Функциянын нөлдөрү жана белгилеринин турактуу аралыктары. $a=c$, $b=0$ болгондо, функциянын нөлү жок. $a\neq0$ болгондо, функциянын нөлү $x=-\frac{b}{a}$ болот. $a=0$, $b=0$ болгондо, $x=-\frac{d}{c}$ дан башка ар кандай сан функциянын нөлү болот.

Биз жогоруда эскерткендин негизинде дайыма $c>0$ болсун дейли.

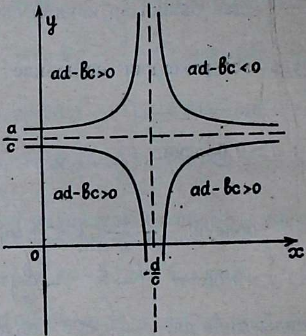
$$y=\frac{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)};\ a>0 \text{ болсун.}$$

а) $-\frac{b}{a}>-\frac{d}{c}$ болсун. $-\frac{b}{a}<x<+\infty$, $\left(-\infty,-\frac{d}{c}\right)$ аралыктарында $y>0$ болот. $\left(-\frac{d}{c},\ -\frac{b}{a}\right)$ аралыгында $y<0$ болот. Чындыгында да, $-\frac{b}{a}<x$ болсо, $-\frac{d}{c}<x$ болот. Анда $x+\frac{b}{a}>0$, $x+\frac{d}{c}>0$, демек, $\frac{a}{c}>0$ болгондуктан, $y>0$ болот. $x<-\frac{d}{c}$ болсо, $x<-\frac{b}{a}$ болот. Анда $x+\frac{d}{c}<0$, $x+\frac{b}{a}<0$, демек, $\frac{a}{c}>0$ болгондуктан, $y>0$ болот. $-\frac{d}{c}<x<-\frac{b}{a}$ болсо, $x+\frac{d}{c}>0$, $x+\frac{b}{a}<0$ болот, анда $\frac{a}{c}>0$ болгондуктан, $y<0$ болот.

б) $-\frac{d}{c}>-\frac{b}{a}$ болсун. $a>0\left(-\frac{d}{a},\ +\infty\right)$, $\left(-\infty,-\frac{b}{a}\right)$ аралыктарында $y>0$; $\left(-\frac{b}{a},\ -\frac{d}{c}\right)$ аралыгында $y<0$. Жогорку «а» учурга окшотуп, муну өзүңөр далилдегиле. Эгер $a<0$ болсо, көрсөтүлгөн аралыктарда функциянын белгиси карама-каршы болот.

11. «6» касиеттин негизинде $y = \frac{a}{c}$ сызыгы функциянын графигинин горизонталь асимптотасы болот. $x = -\frac{d}{c}$ сызыгы вертикаль асимптотасы болот, башка асимптоталары жок болот.

12. Функциянын графиги (51-чийме).



51-чийме

Эскертүү. Бөлчөктүү сызыктуу функциянын графигин түзгөндө практикада төмөнкүлөрдү иштөө пайдалуу.

1. Графиктин асимптоталарын табуу: $y=\frac{a}{c}$ (горизонталдык), $x = -\frac{d}{c}$ (вертикалдык). Бул сызыктар кесилишкенде, координата тегиздиги 4 чейрекке бөлүнөт.

2. $ad-bc$ туюнтмасын эсептөө.

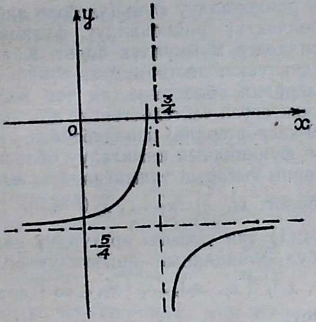
а) Эгерде $ad-bc>0$ болсо, график 2-жана 4-чейректе жатат.

б) Эгерде $ad-bc<0$ болсо, график 1-жана 3-чейректе жатат.

в) Графиктин координаталык октор менен кесилишкен чекиттерин табуу: x огун $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ чекитте, y огун $\left(0, \frac{b}{d}\right)$

чекитте кесип өтөт. Мисалы, $y=\frac{5x-1}{3-4x}$ функциясынын графигин түзгүлө. $y=\frac{-5x+1}{4x-3}$ деп жазып алабыз. Асимптоталары $y=-\frac{5}{4}$, $x=\frac{3}{4}$ болот.

$ad-bc=-5-(-3)-1\cdot 4=11>0$ график 2-жана 4-чейректерде жатат (52-чийме) x огун $\left(\frac{1}{5}, 0\right)$ чекитте, y огун $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ чекитте кесип өтөт.



52-чийме

Суроолор

1. Бөлчөктүү сызыктуу функция деп, кандай функцияны айтабыз?
2. Бул функциянын аныкталуу областы кандай аралыктардан турат?
3. Бул функция кайсы аралыкта үзгүлтүксүз болот жана эмне үчүн?
4. Берилген функциянын монотондуулук аралыктарын көрсөткүлө: а) элементардык жол менен, б) туундуну колдонуп изилдегиле.
5. Бул функциянын томпоктук, ийметик касиеттерин: а) элементардык жолду колдонуп, б) туундуну колдонуп изилдегиле.
6. Бөлчөктүү сызыктуу функция аргумент чексизге умтулганда кандай өзгөрөт. 2-түрдөгү үзүлүү чекитинин аймагында кандай өзгөрөт?
7. Бул функциянын маанилеринин областы кандай аралыктардан турат?
8. Берилген функциянын чектелген, чектелбегени жөнүндө эмне айтууга болот?
9. Бул функциянын нөлдөрү, белгилеринин туруктуу аралыктары жөнүндө эмне айта аласыңар?

10. Бул функциянын графигинин асимптоталары кандай сызыктар болот?

11. Берилген функциянын графигин түзгүлө, графикти түзүүдө кандай практикалык көрсөтмөнү колдонуу пайдалуу болот?

2. Бөлчөктүү рационалдуу функциялар (жалпы учур).

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_0}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_0} = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \qquad (1)$$

кыскарбас бөлчөгү түрүндөгү функция бөлчөктүү рационалдуу функция деп аталары белгилүү. $Q_m(x)$ функциясы нөл даражалуу болбоо керек, андай болсо берилген функция бөлчөктүү рационалдуу функция боло албас эле. Жалпы учурда бөлчөктүү рационалдуу функциянын айрым касиеттери изилдөөгө мүмкүндүк болот. Калган касиеттерине монотондуулукка, экстремумга, томпоктукка, иймектикке, маанилеринин областына, эң чоң жана эң кичине маанилерине, чектелген чектелбегенине жалпы схема боюнча (4, 5, 7, 8, 9-касиеттерине) изилдебейбиз.

1. Берилген функциянын аныкталуу областы $Q_m(x)=0$ болгон чекиттерин чыгарып таштагандагы чыныгы сандардын көптүгү болот. $x_1', x_2'; x_3', \dots, x_k' (k \leqslant m)$ өсүү боюнча жайлашкан $Q_m(x)$ тин чыныгы ар түрдүү нөлдөрү болсун дейли. Анда бул функциянын аныкталуу областы чектүү сандагы $(-\infty, x_1')$, $(x_1', x_2'), \dots, (x_k', +\infty)$ аралыктарынын системасы болот.

2. Жалпы учурда бөлчөктүү рационалдуу функция жуп да, так да функция боло албайт.

3. Үзгүлтүксүз функциялардын катышы болгондуктан, бул функция $Q_m(x) \neq 0$ болгон бардык чекитинде үзгүлтүксүз болот.

6. x чексизге умтулгандагы функциянын өзгөрүүсү.

$$\text{а) } n > m. \text{ I. } \lim_{x \to \pm\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases} +\infty, \text{ эгер } \dfrac{a_0}{b_0} > 0 \text{ болсо,} \\ -\infty, \text{ эгер } \dfrac{a_0}{b_0} < 0 \text{ болсо.} \end{cases} \qquad (2)$$

$$\text{II. 1) } \frac{a_0}{b_0} > 0. \ \lim_{x \to -\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases} +\infty, \text{ эгер } n-m \text{ жуп сан болсо,} \\ -\infty, \text{эгер, } n-m \text{ так сан болсо.} \end{cases} \qquad (3)$$

2) $\frac{a_0}{b_0} < 0.$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\begin{cases}-\infty, \text{ эгер, } n-m \text{ жуп сан болсо,}\\ +\infty, \text{ эгер, } n-m \text{ так сан болсо.}\end{cases} \tag{4}$$

Далилдөө

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^{n-m}\left(1+\frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{1}{x}+\frac{a_2}{a_0}\cdot\frac{1}{x^2}+\ldots+\frac{a_n}{a_0x^n}\right)}{b_0\left(1+\frac{b_1}{b_0}\cdot\frac{1}{x}+\frac{b_2}{b_0}\cdot\frac{1}{x^2}+\ldots+\frac{b_m}{b_0x^m}\right)}. \tag{5}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{1}{x}+\frac{a_2}{a_0x^2}+\ldots+\frac{a_n}{a_0x^n}}{1+\frac{b_1}{b_0}\cdot\frac{1}{x}+\frac{b_2}{b_0}\cdot\frac{1}{x^2}+\ldots+\frac{b_m}{b_0x^m}}=1. \tag{6}$$

Анда (5), (6) нын негизинде

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0}{b_0}x^{n-m} \tag{7}$$

келип чыгат. Ал эми (7) ден (2), (3) жана (4) келип чыгат.

б) $m=n$. Бул учурда (7) негизинде

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0}{b_0}=\frac{a_0}{b_0}.$$

в) $n<m$, ошол эле (7) негизинде:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0}{b_0}=\frac{1}{x^{m-n}}=0.$$

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ функциясы, $Q_m(x)=0$ болгон чекиттеринде $+\infty$ же $-\infty$ ге барабар пределдерге ээ болушат, же болбосо бирөө $+\infty$, экинчиси $-\infty$ болгон бир жактуу пределдерге ээ болушат.

Далилдөө. Эгер α саны $Q_m(x)$ тин нөлү болсо, ал $(x-\alpha)$ га бөлүнөт. Анда $Q_m(x)=(x-\alpha)^{\alpha}Q_{m-k}(x)$ болот. Мында k саны α нөлүнүн эселүүлүгүн көрсөткөн бүтүн оң сан. (1) бөлчөк кыскарбас болгондуктан, α саны $Q_n(x)$ тин нөлү боло албайт, б. а. $P_n(\alpha)\neq0$.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{P_n(x)}{(x-\alpha)^kQ_{m-k}(x)}. \tag{8}$$

$$\frac{P_n(x)}{Q_{m-k}(x)}=R_1(x) \tag{9}$$

$$\lim_{x\to\alpha}R_1(x)=\frac{P_n(\alpha)}{Q_{m-k}(\alpha)}=R_1(\alpha). \tag{10}$$

а) Эгер k жуп сан болсо,

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{1}{(x-\alpha)^k}=+\infty \text{ болот.} \tag{11}$$

Анда (8), (10) жана (11) негизинде:

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\begin{cases}+\infty, & \text{эгер } P_1(\alpha)>0 \text{ болсо,}\\ -\infty, & \text{эгер } P_1(\alpha)<0 \text{ болсо.}\end{cases}$$

б) эгер k так сан болсо,

$$\lim_{\substack{x\to\alpha\\ x<\alpha}}\frac{1}{(x-\alpha)^k}=-\infty,\quad \lim_{\substack{x\to\alpha\\ x>\alpha}}\frac{1}{(x-\alpha)^k}=+\infty. \tag{12}$$

(8), (10) жана (12) нин негизинде:

$$\lim_{\substack{x\to\alpha\\ x<\alpha}}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\begin{cases}-\infty, & \text{эгер } R_1(\alpha)>0 \text{ болсо,}\\ +\infty, & \text{эгер } R_1(\alpha)<0 \text{ болсо.}\end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to\alpha\\ x>\alpha}}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\begin{cases}+\infty, & \text{эгер } R_1(\alpha)>0 \text{ болсо,}\\ -\infty, & \text{эгер } R_1(\alpha)<0 \text{ болсо.}\end{cases}$$

Функциянын нөлү жана белгилеринин турактуу аралыктары жөнүндө $P_n(x)$ көп мүчөсүнүн нөлдөрү берилген (1) функциянын да нөлдөрү болуп эсептелери көрүнүп турат. Ал эми көп мүчөнүн нөлдөрү жөнүндө § 17 (5) де айтылган. Эми берилген функциянын белгилеринин турактуу аралыктарын карап көрөлү.

а) $a=b$ болсун. Анда

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{(x-x_1)^{\alpha}(x-x_2)^{\beta}\dots(x^2+Px+q)^{\delta}}{(x-x_1')^{\alpha_1}(x-x_2')^{\beta_1}\dots(x^2+P_1x+q_1)^{\delta_1}}.$$

Мында x_1, x_2, ... x_1', x_2', ... чыныгы сандары алымынын да, бөлүмүнүн да нөлдөрү болсун. Аларды өсүү тартиби боюнча жайлаштыралы. Анда алар Ox огун белгилүү сандагы аралыктарга бөлөт. Бул аралыктардын ар биринде функциянын белгиси турактуу болору белгилүү. Аралыктардын бирөөнөн x тин кандайдыр бир маанисин алабыз, бул маанисинде терс белгиге ээ болуучу алымдагы жана бөлүмдөгү көбөйтүүчүлөрдү, алардын эселүүлүгүн эске алуу менен оңой эле санап чыгууга болот. Мындай көбөйүүчүлөрдүн саны x тин каралып жаткан маанисинен чоң болгон алымдын жана бөлүмдүн так эселүү чыныгы нөлдөрүнүн санына барабар болот, ал берилген аралыктан тандалган x тин маанисине көз каранды эмес. Жалпы эле аралыкка көз каранды экени түшүнүктүү. Бул сан жуп болсо, берилген функциянын каралып жаткан аралыктагы белгиси оң болот, так болсо, терс болот. Башка аралыктарда функциянын белгисин билүү үчүн алымдын жана бөлүмдүн жуп эселүү чыныгы нөлдөрү аркылуу өткөндө, функция белгисин өзгөртпөсүн, так эселүү чыныгы нөлдөрү аркылуу өткөндө, белгиси өзгөрөөрүн эске алуу жетишет. Мисалы,

$$y = \frac{(x-3)^2 (x-5)^7 + (x-4)^3 (x^2+5x+7)^5}{(x-2)(x-6)^3 (x-9)^8 (x^2+6x+11)^3}.$$

Алымдын жана бөлүмдүн чыныгы ар түрдүү нөлдөрүн өсүү тартиби боюнча жайлаштырсак: 2, 3, 4, 5, 6, 9 болуп жазылат, алар Ox огун $(-\infty, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 5)$, $(5, 6)$, $(6, 9)$, $(9, +\infty)$ болгон 7 аралыкка бөлөт. $(2, 3)$ аралыгынын $x=2{,}5$ маанисин алалы. 2,5 тен чоң болгон жана так эселүү болгон алымдын жана бөлүмдүн нөлдөрүнүн саны 3, алар 4, 5, 6 болот. Демек, $x=2{,}5$ болгондо ошондой эле жалпы эле, $2<x<3$ болгондо, $y<0$ болот. $x=2$ так эселүү нөл (бөлүмдүн) болгондуктан, бул нөл аркылуу өткөндө, функция белгисин алмаштырат, демек, $(-\infty, 2)$ аралыгында $y>0$ болот. $x=3$ жуп эселүү нөл (алымдын) болгондуктан, x бул нөл аркылуу өткөндө, функция белгисин өзгөртпөйт, демек, $(3, 4)$ аралыгында $y<0$ болот. Ушундай эле ой жүгүртүүлөр менен $(4, 5)$ аралыгында $y<0$, $(5, 6)$ аралыгында $y<0$, $(6, 9)$ аралыгында $y>0$, $(9, +\infty)$ аралыгында $y>0$ болорун биле алабыз.

б) $a_0 \neq b_0$ болсун. Анда эгер $\frac{a_0}{b_0}>0$ болсо, функциянын белгилери өзгөртүлбөй калат. Эгер $\frac{a_0}{b_0}<0$ болсо, белгилер жогоруда айтылганга караганда карама-каршы бөлүштүрүлөт.

11. Функциянын графигинин асимптоталары.

1) Вертикаль асимптоталары. $x_1', x_2', \ldots x_k' (k \leqslant m)$ сандары $Q_m(x)=0$ теңдемесинин ар түрдүү чыныгы тамырлары болсун. Анда 6-касиетте айтылгандардын негизинде $x=x_1'$, $x=x_2'$, ... , $x=x_k'$ сызыктары функциянын графигинин вертикаль асимптоталары болот.

2) Жантык (мунун ичинде горизонталь) асимптоталары. а) $n<m$ болсун. «6» касиеттин негизинде $y=0$ сызыгы (Ox огу) бул учурда функциянын графигинин горизонталь асимптотасы болот. б) $n=m$ болсун. Ошондой эле «6» касиеттин негизинде $y=\frac{a_0}{b_0}$ сызыгы функциянын графигинин горизонталь асимптотасы болот. в) $n>m$ болсун. Эгер $n=m+1$ болсо, функциянын графиги $y=ax+b$ жантык

асимптотасы болот. Бул учурда $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}}{x}=\frac{a_0}{b_0}$, $a=\frac{a_0}{b_0}$ экенин оңой эле табууга болот. Эми b ны табуу үчүн $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}-\frac{a_0}{b_0}x\right]=b$ пределин эсептөө керек.

Бөлчөктүү рационалдуу функциянын жантык асимптотасын башкача жөнөкөй жол менен, атап айтканда, берилген (1) бөлчөктүн бүтүн бөлүгүн бөлүп алып (алымын бөлүмүнө бөлүү менен), төмөнкүгө ээ болобуз: $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=ax+b+\frac{P_1(x)}{Q_m(x)}$. Мында $P_1(x)$ тин даражасы $Q_m(x)$ тин даражасынан кичине болот.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}-(ax+b)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{P_1(x)}{Q_m(x)}=0$ болот. Демек, $y=ax+b$ берилген функциянын графигинин жантык асимптоталары болот.

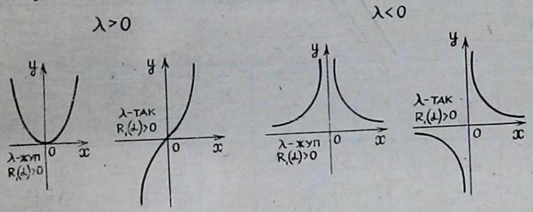
Эгер $n\geqslant m+2$ болсо, бул функциянын жантык асимптотасы жок болот. Эгер $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ тин бүтүн бөлүгүн бөлүп алсак, бул учурда $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=S(x)+\frac{P_t(x)}{Q_m(x)}$ ке ээ болобуз. $(m>t)$, мындан $x\to\pm\infty$ умтулганда $\frac{P_t(x)}{Q_m(x)}\to 0$ болгондуктан, берилген бөлчөктүү рационалдуу функция өзүн даражасы бирден жогору болгон $S(x)$ көп мүчөсүндөй алып жүрөрү келип чыгат.

12. Функциянын графигин түзүүнүн кээ бир гана деталдарына токтолобуз. Функция белгисин алмаштырууга мүмкүн болгон чекиттин аймагында графиктин жайланышын карайлы. Мындай чекит (1) нин алымынын же бөлүмүнүн нөлү болгон учурларды бириктирип, (1) төмөндөгүдөй түрдө жазып алалы:

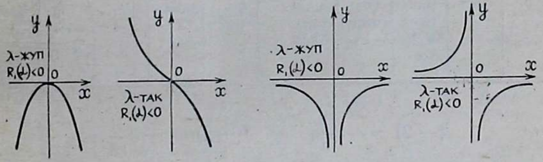
$$y=\frac{P_m(x)}{Q_m(x)}=(x-\alpha)^{\lambda}R_1(x).$$

Мында α алымдын же бөлүмдүн каралып жаткан нөлү, $|\lambda|$ анын эселүүлүгү, $R_1(x)$ калган көбөйтүүчүлөрдүн тиешелүү түрдө жазылган көбөйтүндүсү.

Эгер α — алымдын нөлү болсо, б. а. $\lambda>0$ болсо, $x=\alpha$ болгондо, $y=0$ болот да графиктин Ox огундагы чекитине ээ болобуз. λ нын жуп же тактыгына жараша бул чекитте график ал окту жаныйт же кесип өтөт. ($\lambda=1$) болсо, жаныбастан кесет. $\lambda=3, 5, \ldots$ болсо, жануу менен кесет). Мындан тышкары $R_1(\alpha)$нын белгисин эске алсак, 53-чиймедеги 4 учурдун бирине ээ болобуз (буларда $\alpha=0$ болгондогу жекече учур көрсөтүлгөн). Эгер α бөлүмдүн нөлү болсо, б. а. $\lambda<0$ болсо, 54-чиймедеги 4 учурдун бирине ээ болобуз.



53-чийме



54-чийме

Мисалы, $y=\dfrac{x^3+x}{x^2-1}$ функциясын толук изилдеп, графигин түзөбүз.

1. Функция $x^2-1=0$ болгон $x=+1$ сандарынан башка бардык чыныгы сандардын көптүгүндө аныкталат, б. а. анын аныкталуу областы $(-\infty, 1)$, $(-1, +1)$, $(+1, +\infty)$ аралыктарынан турат.

2. $f(-x)=\dfrac{-x^3-x}{x^2-1}=-\dfrac{x^3+x}{x^2-1}=-f(x)$ болгондуктан, бул функция так функция болот.

3. Үзгүлтүксүз функциялардын катышы болгондуктан, функция $x=\pm 1$ болгон бардык чекиттерде үзгүлтүксүз функция болот.

4. Функциянын монотондуулук аралыктары жана экстремалдык маанилери.

$$y' = \frac{(3x^2+1)(x^2-1)-2x(x^3+x)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-4x^2-1}{(x^2-1)^2}.$$

$x=\pm 1$ де туунду мааниге ээ эмес, бирок бул чекиттерде функция да мааниге ээ болбогондуктан, бул чекиттер кризистик чекиттер боло албайт. $x^4-4x^2-1=0$ болсо, $y'=0$ болот.

$x_{1,2}=\pm\sqrt{2\pm\sqrt{5}}$; $x_{1,2}\approx\pm 2$, калган эки тамыр мнимый болот.

x / y', y	$(-\infty, 2)$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, +1)$	$+1$	$(+1, +2)$	2	$(2, +\infty)$
y'	+	0	—	аныкталбайт	—	аныкталбайт	—	0	+
y	өсөт	максимум чекит	кемийт	аныкталбайт	кемийт	аныкталбайт	кемийт	минимум чекит	өсөт

$$f(-2) = -3\frac{1}{3}; \qquad f(+2) = +3\frac{1}{3}.$$

5. Функциянын томпоктугу, иймектиги, ийилүү чекиттери.

$$y'' = \frac{(4x^3-8x)(x^2-1)^2-(4x^3-4x)(x^4-4x^2-1)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{4x(x^2-2)(x^2-1)^2-4x(x^2-1)(x^4-4x^2-1)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{4x(x^2-1)(x^4-3x^2+2-x^4+x^2+1)}{(x^2-1)^4} = \frac{4x(x^2-1)(x^2+3)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{4x(x^2+3)}{(x-1)^3(x+1)^3};$$

$x=\pm 1$ чекиттеринде 2-туунду мааниге ээ эмес, бирок бул чекиттерде функция да аныкталбайт, ошондуктан бул чекиттер ийилүү чекиттер боло албайт. $4x(x^2+3)=0$ болгондо, $y''=0$ болот. $x_1=0$, калган эки тамыры мнимый болот.

x / y'', y	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, +1)$	1	$(1, +\infty)$
y''	—	анык-тал-байт	+	0	—	анык-тал-байт	+
y	томпок	анык-тал-байт	иймек	ийилүү чекити	томпок	анык-тал байт	иймек

6. Функциянын чексизге умтулгандагы жана 2-түрдөгү үзүлүү чекиттеринин өзгөрүүлөрү.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x}{x^2-1}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x+x^2}{1-\frac{1}{x^2}}=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+x}{x^2-1}=-\infty,$$

$$y=\frac{x^3+x}{x^2-1}=\frac{x(x^2+1}{(x-1)(x+1)}.$$

$x=-1$ үзүлүү чекитинин аймагындагы функциянын өзгөрүү мүнөзүн карайлы.

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}y=\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\frac{1}{x+1}\cdot\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\frac{x(x^2+1)}{(x-1)}=-\infty\cdot\left(-\frac{-1\cdot 2}{-2}\right)=-\infty,$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}y=\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\frac{1}{x+1}\cdot\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\frac{x(x^2+1)}{(x-1)}=+\infty\cdot(+1)=+\infty.$$

Эми $x=+1$ үзүлүү чекитинин аймагындагы функциянын өзгөрүүсүн карайбыз.

$$\lim_{\substack{x\to+1\\x<+1}}y=\lim_{\substack{x\to+1\\x<+1}}\frac{1}{x-1}\cdot\lim_{\substack{x\to+1\\x<+1}}\frac{x(x^2+1)}{x+1}=-\infty\cdot\frac{1\cdot 2}{2}=-\infty,$$

$$\lim_{\substack{x\to+1\\x>+1}}y=\lim_{\substack{x\to+1\\x>+1}}\cdot\frac{1}{x-1}\ \lim_{\substack{x\to+1\\x>+1}}\frac{x(x^2+1)}{x+1}=+\infty\cdot 1=+\infty.$$

7. Функциянын маанилеринин областы жогоркудан $(-\infty, +\infty)$ аралыгы экени көрүнүп турат.

8. Жалпы аныкталуу областы боюнча алганда функциянын эң чоң жана эң кичине мааниси жок. Эгер $(-\infty, -1)$ аралыгын алсак, 4-касиеттин негизинде $y=-3\frac{1}{3}$ функциянын эң чоң мааниси болот, эң кичине мааниси жок. Эгер $(+1, +\infty)$ аралыгын алсак, ошол эле 4-касиеттин неги-

зинде $y=+3\frac{1}{3}$ эң кичине мааниси болот, эң чоң мааниси жок.

9. Жалпы аныкталуу областы боюнча алсак, функция чектелбеген болот. Эгер аныкталуу областынын кандайдыр бир бөлүктөрүн алсак, 8-касиеттин негизинде $(-\infty, -1)$ аралыгында функция жогор жактан $y=-3\frac{1}{3}$ менен чектелет, төмөн жактан чектелбейт. Ал эми $(+1, +\infty)$ аралыгында төмөн жактан $y=3\frac{1}{3}$ менен чектелет, жогор жактан чектелбейт.

10. Функциянын нөлү, белгилеринин турактуу аралыктары. Бул функциянын нөлүн табуу үчүн $x^3+x=0$ теңдемесин чыгаруу керек. $x(x^2+1)=0$ функциянын $x=0$ деген бир гана чыныгы нөлү болот, калган эки нөлү мнимый болот. Эми функциянын белгилеринин турактуу аралыктарын кароо үчүн бөлүмдүн нөлдөрүн да табуу керек. Анын нөлдөрү $x=\pm1$ экени белгилүү. Функцияны төмөнкүдөй түрдө жазууга болот: $y=\frac{x(x^2+1)}{(x-1)(x+1)}$. Алымдын жана бөлүмдүн нөлдөрүн өсүү тартиби боюнча -1, 0, $+1$ деп жазып алабыз, алар функциянын аныкталуу областын $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$ деген 4 аралыкка бөлөт. Ар бир аралыкта функциянын белгиси турактуу болору белгилүү. Мейли $(-\infty, -1)$ аралыгынан $x=-2$ маанисин алалы, -2 ден чоң болгон так эселүү алымдын жана бөлүмдүн нөлдөрүнүн саны үчөө, алар: -1, 0, $+1$. Анда $(-\infty, -1)$ аралыгында $y<0$ болот. -1 так эселүү нөл болгондуктан, ал аркылуу x өткөндө, функциянын белгиси өзгөрөт, демек, $(1, 0)$ аралыгында $y>0$ болот. Ушундай эле ой жүгүртүү менен $(0, 1)$ аралыгында $y<0$, ал эми $(1, +\infty)$ аралыгында $y>0$ болоруна ишенебиз.

11. Функциянын графигинин асимптоталары. «6» касиеттин негизинде, $x=\pm1$ сызыктары функциянын графигинин вертикаль асимптоталары болот.

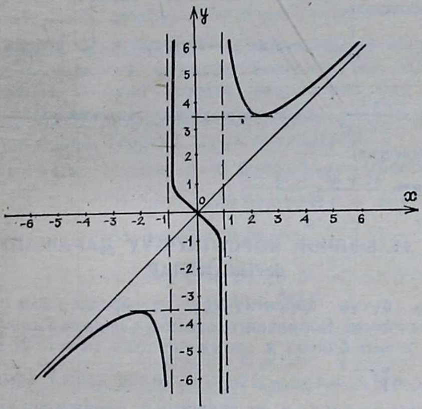
Бул функцияны бөлчөктүн алымындагы көп мүчөнүн даражасы, бөлүмүндөгү көп мүчөнүн даражасынан 1 ге артык болгондуктан, графиктин $y=ax+b$ жантык асимптоталары бар болот, аны изилдейли.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^3+x}{x^2-1}}{x}=1,\ a=1.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3+x}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+x-x^3+x}{x^2-1}=0.$$

Демек, $y=x$ сызыгы берилген функциянын жантык асимптотасы болот.

12. Функциянын графиги (55-чийме).



55-чийме

Суроолор

1. Бөлчөктүү рационалдуу функция деп, кандай алгебралык функцияны айтабыз?
2. Бул функциянын үзгүлтүксүздүгү жөнүндө эмне айтууга болот?
3. Функция x чексизге умтулганда кандай өзгөрөт?
4. Функция бөлүмү нөлгө айланган чекиттердин аймагында кандай өзгөрөт?
5. Функциянын нөлдөрү жана белгилеринин туруктуу аралыктары жөнүндө эмне билесиңер?
6. Кандай сызыктар функциянын графигинин вертикаль асимптоталары болот?
7. Функциянын графигинин жантык (горизонталь) асимптоталары жөнүндө эмне айтууга болот?

Көнүгүүлөр

138. Төмөнкү бөлчөктүү сызыктуу функциялардын графигин түзүп, ошол графиги боюнча анын касиеттерин айтып бергиле:

1) $y=\dfrac{3}{x-2}$; 2) $y=\dfrac{2x}{x+3}$; 3) $y=\dfrac{3x+2}{2x}$;

4) $y=\frac{6x+2}{2x-3}$; 5) $y=\frac{4x-3}{1-2x}$.

Төмөнкү функцияларды алдын ала изилдөө менен графиктерин түзгүлө:

139. $y=\frac{x^2-1}{x}$ (4, 5-касиеттерди изилдөөдө элементардык жолдорду да колдонгула).

140. $y=x+\frac{1}{x^2}$ (5-касиетти элементардык жолду колдонуп изилдегиле).

141. $y=\frac{1}{1-x^2}$ (4, 5-касиеттерди изилдөөдө элементардык жолдорду да колдонгула).

142. $y=\frac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$.

§ 19. БӨЛЧӨК КӨРСӨТКҮЧТҮҮ ДАРАЖАЛУУ ФУНКЦИЯЛАР

1. Оң бүтүн көрсөткүчтүү тамырдын бар болушу. 1-аныктама. Берилген a санынын n даражадагы тамыры деп, $x^n=a$ болгон x санын айтабыз ($n=1, 2, 3, ...$). Мында $x=\sqrt[n]{a}$ же $x=a^{\frac{1}{n}}$ деп белгилөө кабыл алынган.

2-аныктама. a оң санынын n даражалуу арифметикалык тамыры деп, $b^n=a$ болгон оң b санын айтабыз.

1-теорема. Ар бир оң сандын ар кандай бүтүн оң көрсөткүчтүү арифметикалык тамыры бар болот жана ал тамыр бирөө гана болот, б. а. эгер $a>0$ болсо, $b=\sqrt[n]{a}>0$ бар болот жана бирөө гана болот.

Далилдөө. Бүтүн оң көрсөткүчтүү даражалуу функция $x=y^n$ $(0, +\infty)$ аралыгында үзгүлтүксүз жана монотондуу (өсүүчү) болуп, маанилеринин области $(0, +\infty)$ аралыгы болору белгилүү. Биз бул жерде x аркылуу функцияны, y аркылуу аргументти белгиледик.

Тескери функциянын бар болушу теореманын негизинде (§ 14 тү карагыла), $(0, +\infty)$ аралыгында бул функцияга тескери функция $y=\sqrt[n]{x}$ бар болот. Бул функция өзүнүн аныкталуу областында үзгүлтүксүз, монотондуу (өсүүчү), анын маанилеринин области $(0, +\infty)$ аралыгы болот. Ар кандай $a>0$ үчүн $b=\sqrt[n]{a}>0$ бар болушу, үзгүлтүксүз функциянын аралык мааниси жөнүндөгү теоремадан[1] келип чыгат, ал эми анын бирөө эле болушу $y=\sqrt[n]{x}$ функциясынын монотондуу (өсүүчү) болушунан келип чыгат.

Чындыгында да, $y=\sqrt[n]{x}$ функциясы үзгүлтүксүз болгондуктан, өзүнүн бир маанисинен экинчи маанисине өтүүсүндө ар бир аралык маанисин жок дегенде бир жолдон алып чыгат, демек, ар кандай $a>0$ саны үчүн $x=a$ болгондо, $y=\sqrt[n]{a}$ болгон функциянын мааниси сөзсүз бар болот, монотондуу (өсүүчү) функция болгондуктан, ал өзүнүн 0 дөн $+\infty$ ге чейинки аралык маанилерин бир жолдон гана алып чыгат, демек, $x=$а болгондогу $y=\sqrt[n]{a}$ мааниси бирөө гана болот. Теорема толук далилденди.

2-теорема. 1) Эгер $a=0$ болсо, $\sqrt[n]{a}=0$ болот.

2) Эгер а>0 болсо, $\sqrt[2n]{a}=\pm\sqrt[2n]{a}$ болот.

3) Эгер а<0 болсо, $\sqrt[2n+1]{a}=-\sqrt[2n+1]{|a|}$ болот.

Далилдөө. 1) Эгер $a=0$ болсо, $0^{n}=0=a$ болот (нөлдүн гана n даражасы нөлдү (a ны) берет.

2) Мейли $a>0$ жана $\sqrt[2n]{a}=x$ болсун, анда $x^{2n}=$а жана $(-x)^{2a}=a$ болот. 3) Мейли $a<0$ жана $\sqrt[2n+1]{|a|}=x$ болсун. Анда $x^{2n+1}=|a|$ жана $(-x)^{2n+1}=|a|$ болот, б. а. $(-x)^{2n+1}=a$ болот.

3-аныктама. $a^{\frac{p}{q}}=(a^{p})^{\frac{1}{q}}=\sqrt[q]{a^{p}}$ болот, мында $a>0$, $\frac{p}{q}$ кыскарбас рационалдуу бөлчөк жана $q>0$.

Биз бул аныктама менен бөлчөктүү көрсөткүчтүү даражаны киргиздик. Бөлчөктүү көрсөткүчтүү даражанын тиешелүү касиеттери орто мектептин математикасынан белгилүү.

Суроолор

1. Берилген a санынын бүтүн оң n даражадагы тамыры деп эмнени айтабыз?
2. Оң сандын n даражалуу арифметикалык тамыры деп эмнени айтабыз?
3. Арифметикалык тамырдын бар экенин далилдегиле.
4. Тамырдын бар болушунун башка учурларын далилдегиле.
5. Бөлчөктүү көрсөткүчтүү даража кандай аныктама менен кийирилет жана мындай даражанын бар болорун көрсөткүлө.

---

[1] Мисалы, И. М. Уваренков, М. З. Маллер «Курс математического анализа». М., 1966 г. 212-бетти карагыла.

2. Оң бөлчөк көрсөткүчтүү даражалуу функциялар.

$y=x^{\frac{p}{q}}$ түрүндөгү функция оң бөлчөк көрсөткүчтүү даражалуу функция деп аталат, мында x — аргумент, p менен q өз ара жөнөкөй натуралдык сандар. Аныктаманын негизинде $x^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{x^p}$.

1. Аныкталуу областы. а) p жуп сан, q так сан болгондо, функциянын аныкталуу областы $(-\infty, +\infty)$ аралыгы болот, себеби дайыма $x^p \geqslant 0$ болот жана жогорудагы оң бүтүн көрсөткүчтүү даражалуу тамырдын бар болушунун негизинде терс эмес сандын q-даражадагы тамыры сөзсүз бар болот. б) p так сан, q жуп сан болгондо, функция $[0, +\infty)$ аралыгында аныкталарын көрүү кыйын эмес. в) p так сан, q так сан болгондо, аныкталуу областы $(-\infty, +\infty)$ аралыгы болот, аны өзүңөр көрсөткүлө.

2. а) q так сан болсун. 1) p так сан болсо, $\sqrt[q]{(-x)^p}=\sqrt[q]{-x^p}=-\sqrt[q]{x^p}$ болгондуктан, функция так болот. 2) р жуп болгондо, $\sqrt[q]{(-x)^p}=\sqrt[q]{x^p}$ болгондуктан, функция жуп болот.

б) q жуп сан болгондо, бул функциянын аныкталуу областы $[0, +\infty)$ болгондуктан, анын жуптугу жана тактыгы жөнүндө айтуу маанисиз болот.

3. $y=\sqrt[q]{u}$; $u=x^p$ функциялары үзгүлтүксүз болгондуктан, татаал функциянын үзгүлтүксүздүгү негизинде $y=\sqrt[q]{x^p}=x^{\frac{p}{q}}$ функциясы да үзгүлтүксүз болот.

4. Функциянын монотондуулук аралыктары, экстремалдык чекиттери. Элементардык жолду колдонуп изилдөө.

а) q так сан, p так сан, $x_1<x_2$; $\sqrt[q]{x_1^p}<\sqrt[q]{x_2^p}$, демек, функция $(-\infty, +\infty)$ аралыгында өсүүчү болот.

б) q так сан, p жуп сан, $0<x_1<x_2<+\infty$ болсун. Анда жогоркуга окшош эле $y_1<y_2$ болуп, функция $(0, +\infty)$ аралыгында өсүүчү болот. $-\infty<x_1<x_2<0$ болсун. Анда $x_1^p>x_2^p>0$ болот жана $\sqrt[q]{x_1^p}>\sqrt[q]{x_2^p}>0$. Демек, функция $(-\infty, 0)$ аралыгында кемүүчү болот.

в) q жуп сан, p так сан болсун, бул учурда фуңкция өзүнүн бардык аныкталуу областы болгон $(0, +\infty)$ аралыгында өсүүчү болору көрүнүп турат.

г) q жуп сан, p жуп сан болсун. $(q, p)=1$ болсун деген шартка каршы келгендиктен, бул учурдун болушу мүмкүн эмес.

Бул айтылгандардан q так сан, p жуп сан болгондо, $x=0$ функциясынын минимум чекити болору келип чыгат. Башка учурларда экстремалдык чекити жок болот.

Туундуну колдонуп изилдөө.

$y' = \frac{p}{q} x^{\frac{p-q}{q}}$; $p>q$ жана $x=0$ болгондо $y'=0$ болот. $p<q$ болгондо, $x=0$ чекитте y' маанисин жоготот. Ошентип, $x=0$ чекити функциянын кризистик чекити болот.

$p>q$ жана $p<q$ болгондо, y' тин белгиси ар бир $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ аралыктарында бирдей болот, бул x^n жана $\frac{1}{x^n}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ функцияларынын белгилеринин көрсөтүлгөн аралыктардын ар биринде бирдей экендигинен келип чыгат.

p жана q жөнүндө	x / y', y	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
1) q—так, p—так $(p-q)$—жуп	y' y	+ өсөт	0 өсөт	+ өсөт
2) q—так, p—жуп $(p-q)$—так	y' y	— кемийт	0 минимум чекит болот	+ өсөт
3) q—так, p—жуп $(p-q)$—так	y' y	аныкталбайт	0 өсөт	+ өсөт

5. Функциянын томпоктугу, иймектиги, ийилүү чекити. Бул касиетке туундуну колдонуп, изилдөө менен чектелебиз.

$$y'' = \frac{p(p-q)}{q^2} x^{\frac{p-2q}{q}}.$$

Эгер $p>2q$ болсо, $x=0$ болгондо, $y''=0$ болот.

Эгер $p<2q$ болсо, $x=0$ чекитинде y'' маанисин жоготот.

Эгер $p=2q$ болсо, $\frac{p}{q}=2$ болуп, берилген функция квадрат функция болуп калаар эле, ошондуктан бул учурду чыгарып таштоо керек. Ошентип, ийилүү чекитке шектүү чекит $x=0$ болот.

$x^{\frac{p-2q}{q}}$ нун белгиси $p>2q$ жана $p<2q$ болгон учурда бирдей болгондуктан, 2-туундунун белгиси $p-q$ айырмасынын белгисине көз каранды болот. Мейли $p-q>0$ болсун.

p жана qлар жөнүндө	x / y'', y	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
1) q—так, p—так $(p-2q)$—так	y'' y	— томпок	0 ийилүү чекити	+ иймек
2) q—так, p—жуп $(p-2q)$—жуп	y'' y	+ иймек	0 иймек	+ иймек
3) q—жуп, p—так $(p-2q)$—так	y'' y	аныкталбайт	0 ийилүү чекити болбойт	+ иймек

$p-q<0$ болгондо, 2-туундунун белгиси жогору айтылгандарга карама-каршы болот, демек, функциянын томпоктук жана иймектиги да карама-каршы багытта өзгөрөт.

$$6.\ \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{p}{q}} = +\infty,\ \lim_{x\to-\infty} x^{\frac{p}{q}} = \begin{cases} +\infty, \text{ эгер } p \text{ жуп сан болсо} \\ (q \text{ так сан}), \\ -\infty, \text{ эгер } p \text{ так сан болсо} \\ (q \text{ так сан}). \end{cases}$$

7. «6» касиеттин негизинде q так сан, p так сан болгондо, функциянын маанилеринин областы $(-\infty, +\infty)$ аралыгы болот, калган учурларда $[0, +\infty)$ аралыгы болот.

8. «7» касиет негизинде q так сан, p так сан болгондо, функциянын эң чоң жана эң кичине мааниси жок болот, калган учурларда нөлгө барабар эң кичине мааниси бар болуп, эң чоң мааниси жок болот.

9. Ошол эле «7» касиеттин негизинде q так сан, p так сан болгондо, функция чектелбейт, калган учурларда тө-

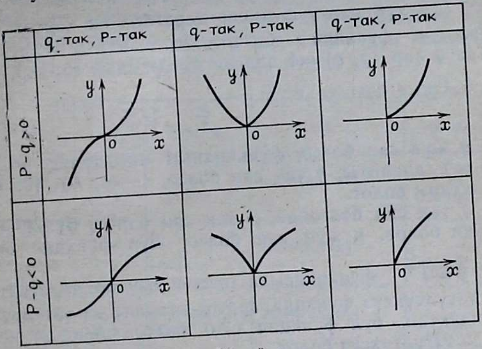
мөн жактан нөл менен чектелет, жогор жактан чектелбейт.

10. Функциянын нөлү, белгилеринин турактуу аралыктары.

$x=0$ болгондо, $y=0$ болот, демек $x=0$ функциянын нөлү болот. q жуп сан болгондо, $(0, +\infty)$ аралыгында $y>0$ болот. q так сан болгондо, а) p жуп сан болсо, $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ аралыктарда $y>0$ болот, б) p так сан болсо, $(-\infty, 0)$ аралыгында $y<0$, $(0, +\infty)$ аралыгында $y>0$ болот. Буга түздөн түз текшерип көрүү менен ишенүүгө болот.

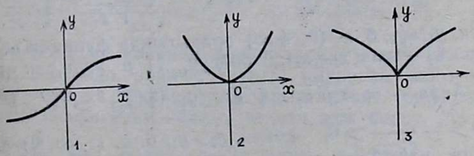
11. Функциянын графиктеринин асимптоталары жок болорун өзүңөр көрсөткүлө.

12. Функциянын графиги (56-чийме).



56-чийме

Мисалы, 1) $y=x^{\frac{3}{5}}$, 2) $y=x^{\frac{10}{7}}$, 3) $y=x^{\frac{2}{3}}$ функцияларынын графиктерин түзгүлө (57-чийме).



57-чийме

Суроолор

1. Оң бөлчөк даражалуу функциянын аныктамасын айтып бергиле.
2. Бул функциянын аныкталуу областы кандай аралыктар болот?
3. Бул функциянын жуп, тактыгы жөнүндө эмне айтууга болот?
4. Берилген функция эмне үчүн үзгүлтүксүз болот?
5. Бул функциянын монотондуулук аралыктары, экстремалдык чекиттери жөнүндө эмне айтууга болот?
6. Бул функциянын томпоктугу, ийметиги жана ийилүү чекиттери жөнүндө эмне айтууга болот?
7. Функциянын маанилеринин областы кандай аралыктар болот?
8. Функциянын нөлү, белгилеринин турактуу аралыктары жөнүндө айтып бергиле.
9. Бардык учурлар үчүн функциянын графигин түзүп, схема түрүндө жайлаштыргыла.

3. Терс бөлчөк көрсөткүчтүү даражалуу функция.

$y = x^{-\frac{p}{q}}$ — түрүндөгү функция терс бөлчөк көрсөткүчтүү даражалуу функция деп аталат, мында x — аргумент, p жана q лар $(p, q) = 1$ болгон натуралдык сандар.

Аныктама боюнча $x^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{x^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{\sqrt[q]{x^p}}$ болот.

1. q жуп сан болсо, функциянын аныкталуу областы $(0, +\infty)$ аралыгы, q так сан болсо, $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ аралыктары болот.

2. q так сан болгондо, p так сан болсо, функция так функция болот. p жуп сан болсо, жуп функция болот. Муну $y = x^{\frac{p}{q}}$ функциясына окшош өзүңөр далилдегиле.

3. Үзгүлтүксүз функциялардын катышы да үзгүлтүксүз болгондуктан, бул функция $x \neq 0$ болгон бардык чекиттеринде үзгүлтүксүз болот.

4. Функциянын монотондуулук аралыктары, экстремалдык маанилери. Элементардык жолду колдонуп изилдөө.

а) $0 < x_1 < x_2 < +\infty$ болсун. Анда

$$\sqrt[q]{x_2} > \sqrt[q]{x_1} > 0, \quad (\sqrt[q]{x_2})^p > (\sqrt[q]{x_1})^p > 0, \quad \frac{1}{\sqrt[q]{x_1^p}} > \frac{1}{\sqrt[q]{x_2^p}}.$$

Демек, $y_1 > y_2$, б. а. $(0, +\infty)$ аралыгында функция кемүүчү болот. б) $-\infty < x_1 < x_2 < 0$ болсун. 1) p жуп сан (q так сан). Анда $-\infty < \sqrt[q]{x_1} < \sqrt[q]{x_2} < 0$, $(\sqrt[q]{x_1})^p > (\sqrt[q]{x_2})^p > 0$, $\frac{1}{\sqrt[q]{x_2^p}} > -\frac{1}{\sqrt[p]{x_1^p}} > 0$, демек, $y_2 > y_1$, б. а. $(-\infty, 0)$ аралыгында q жуп сан болгондо, функция өсүүчү болот. 2) p так (q так) сан болгондо, $(-\infty,\ 0)$ аралыгында функция кемүүчү болорун өзүңөр далилдегиле. Бул айтылгандардан функциянын экстремалдык чекиттери болбой турганы келип чыгат.

Туундуну колдонуп изилдөө.

$$y' = -\frac{p}{q}x^{-\frac{p+q}{q}}.$$

x тин бир да маанисинде y' нөлгө айланбайт. $x=0$ дө 1-туунду маанисин жоготот, бирок бул чекитте функция да аныкталбайт. Демек, функциянын экстремалдык чекиттери жок болот. Мында $(x^{-\frac{p}{q}})'$ нын белгиси $(x^{\frac{p}{q}})'$ нын белгисине карама-каршы экени, демек, бул эки функция тиешелүү аралыктарда карама-каршы багытта өзгөрөрү көрүнүп турат. $p-q$ менен $p+q$ нун жуп жана тактыгы бирдей экени көңүлгө алынуу керек.

p жана q нун жуп, тактыгы	x y', y	$(-\infty,\ 0)$	0	$(0,\ +\infty)$
q—так, p—так $(p+q)$ — жуп	y' y	— кемийт	аныкталбайт	— кемийт
q—так, p—так $(p+q)$ — жуп	y' y	+ өсөт	аныкталбайт	— кемийт
q—жуп, p—так $(p+q)$—так	y' y	аныктал-байт	аныкталбайт	— кемийт

5. Функциянын иймектеги, томпоктугу, ийилүү чекиттери. Бул жерде туундуну колдонуп изилдөө менен чектелебиз.

$$y'' = -\frac{p}{q}\cdot\left(-\frac{p+q}{q}\right)\cdot x^{-\frac{p+q}{q}-1} = \frac{p(p+q)}{q^2}x^{-\frac{p+2q}{q}}.$$

x тин бир да маанисинде экинчи туунду нөлгө айланбайт. $x=0$ болгондо, экинчи туунду маанисин жоготот, бирок бул чекитте функция да аныкталбайт, ошентип, функциянын графигинин ийилүү чекити жок болот. Мында $\frac{p(p+q)}{q^2} > 0$ болуп, $p-2q$ менен $p+2q$ нун жуп, тактыгы бирдей болгондуктан, $(x^{-\frac{p}{q}})''$ тин белгиси $(x^{\frac{p}{q}})''$ тин $p-q>0$ болгон учурдагы белгиси менен бирдей болот.

p жана q лардын жуп, тактыгы	x / y'', y	(−∞, 0)	0	(0, +∞)
q—так, p—так (p+2q)—так	y'' y	— томпок	аныкталбайт	+ иймек
q—так, p—жуп (p+2q)—жуп	y'' y	+ иймек	аныкталбайт	+ иймек
q—жуп, p—так (p+2q)—так	y'' y	аныктал-байт	аныкталбайт	+ иймек

6. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^{-\frac{p}{q}}=0$ болот, себеби $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^{\frac{p}{q}}=\pm\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to+0\\ x>0}} x^{-\frac{p}{q}}=+\infty$ болот, себеби $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{p}{q}}=0.$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x^{-\frac{p}{q}}=\begin{cases}+\infty, & \text{эгер } p \text{ жуп сан болсо } (q \text{ так сан}),\\ -\infty, & \text{эгер } p \text{ так сан болсо, } (q \text{ так сан}).\end{cases}$$

Мунун себеби так эле жогоркудай.

7. «6» касиеттен функциянын маанисинин областы, эгерде q так сан, p так сан болсо, $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ боло турганы, калган учурларда $(0, +\infty)$ аралыгы болору келип чыгат.

8. «7» касиеттин негизинде функциянын эң чоң жана эң кичине мааниси жок болот.

9. Ошол эле «7» касиеттин негизинде q так сан, p так сан болгондо, функция чектелбеген болот. Калган учурларда жогор жактан чектелбейт, төмөн жактан $y=0$ менен чектелет.

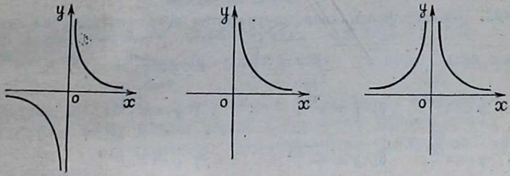
10. Функциянын нөлү жана белгилеринин турактуу аралыктары. x тин эч бир маанисинде функция нөлгө айланбагандыктан, функциянын нөлү болбойт. 6, 7-касиеттердин негизинде $(0, +\infty)$ аралыгында дайыма $y>0$ бо-

лот. $(-\infty, 0)$ аралыгында p жуп сан болсо, (q так сан болот). $y>0$, p так сан болсо, (q так болот), $y<0$ болот.

11. «6» касиеттин негизинде $x=0$, $y=0$ сызыктары функциянын графигинин асимптоталары болушат, башка асимптоталары жок болот.

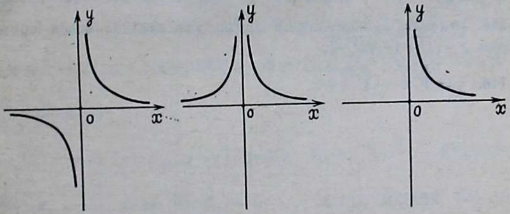
12. Функциянын графиги (58-чийме).

q — так, p — так. |q — так, p — жуп.| q — жуп, p — так.



58-чийме

Мисалдар. 1) $y=x^{-\frac{3}{7}}$, 2) $y=x^{-\frac{2}{5}}$ 3) $y=x^{-\frac{11}{8}}$, функцияларынын графигин түзгүлө (59-чийме).



59-чийме

Суроолор

1. Терс бөлчөк көрсөткүчтүү даражалуу функция деп кандай функцияны айтабыз?

2. Бул функция кайсы учурда жуп, кайсы учурда так болот?

3. Бул функция кайсы аралыктарда эмне үчүн үзгүлтүксүз болот?

4. Функциянын монотондуулук аралыктары, экстремалдык чекиттери жөнүндө айткыла.

5. Берилген функциянын томпоктугу, иймектиги жана ийилүү чекиттери жөнүндө эмне билесиңер?

6. Аргумент чексизге умтулганда жана үзүлүү чекитинин аймагында функциянын өзгөрүү мүнөзү кандай болот?

7. Функциянын маанилеринин областы кайсы учурда кандай аралыктар болот?

8. Функциянын чектелген, чектелбегени жөнүндө эмне айтууга болот?

9. Функциянын нөлү, белгилеринин турактуу аралыктары жөнүндө айтып бергиле.

10. Функциянын графигинин асимптоталары кандай сызыктар болушат?

11. Ар түрдүү учурлар үчүн функциянын графигин түзгүлө.

Көнүгүүлөр

143. Төмөнкү функциялардын графигин түзүп, касиеттерин график боюнча айтып бергиле: 1) $y=x^{\frac{17}{9}}$; 2) $y=x^{\frac{22}{15}}$; 3) $y=x^{\frac{47}{32}}$;

4) $y=x^{\frac{17}{19}}$; 5) $y=x^{\frac{16}{27}}$; 6) $y=x^{-\frac{41}{54}}$;

7) $y=x^{\frac{23}{15}}$; 8) $y=x^{-\frac{50}{69}}$; 9) $y=x^{-\frac{63}{80}}$.

144. Жөнөкөй өзгөртүп түзүү методун колдонуп, төмөнкү функциялардын графигин түзүп, графиги боюнча функциянын касиеттерин айтып бергиле: 1) $y=3x^{\frac{1}{3}}$; 2) $y=(x+1)^{\frac{4}{3}}$; 3) $y=2(x-1)^{\frac{1}{2}}$;

4) $y=2x^{-\frac{1}{2}}$; 5) $y=(x-2)^{-\frac{7}{5}}$; 6) $y=3(x-2)^{-\frac{1}{3}}+1$.

145. Төмөнкү функцияларды алдын ала изилдөө менен графигин түзгүлө: $y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$.

146. $y=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+1}$.

III ГЛАВА

ТРАНСЦЕНДЕНТТИК ЭЛЕМЕНТАРДЫК ФУНКЦИЯЛАР

§ 20. КӨРСӨТКҮЧТҮҮ ЖАНА ЛОГАРИФМДИК ФУНКЦИЯЛАР

1. Иррационалдуу көрсөткүчтүү даража. Алдын ала

$$\lim_{r\to 0} a^r = 1 \quad (a > 0) \tag{1}$$

экендигин далилдеп алуу керек. Мында r рационалдуу маанилерди алуу менен нөлгө умтулуучу өзгөрмө. (1) ни далилдөө үчүн, адегенде төмөнкүлөрдү далилдеп алуу талап кылынат:

$$1)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \tag{2}$$

болот, мында n натуралдык сан, $a>0$ жана арифметикалык тамыры алынат.
а) $a>1$ болгон учурда $n>1$ деп алабыз, анда

$$\sqrt[n]{a} = 1+\beta_n\,(\beta_n>0). \tag{3}$$

(3) нү n-даражага көтөрөбүз. $a=(1+\beta_n)^n = 1+n\beta_n+$

$+\dfrac{n(n-1)}{2}\beta_n^2+\dots$.

Мындан, $a>1+\beta_n$, $a-1>n\beta_n$, $\beta_n<\dfrac{a-1}{n}$. Ошентип, $0<\beta_n<\dfrac{a-1}{n}$, анда $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$ болот. Демек, (3) дөгү пределге өтсөк, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\beta_n)=1$ болот да, (2) ге ээ болобуз. б) $0<a<1$ учуру $a=\dfrac{1}{b}(b>1)$ деп алып, жогорку далилденгендин негизинде $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{b}}=\dfrac{1}{1}=1$ ге ээ болобуз. в) Эгер $a=1$

болсо да, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$ болот. 2) $r_2 > r_1$ болгондо,

$$a^{r_2} > a^{r_1} \tag{4}$$

болорун далилдейбиз. Мында r_1 жана r_2 рационалдуу сандар жана $a>1$, $a^{\frac{1}{q}} > 1$ болгондуктан, $r_2 = \frac{p_2}{q}$, $r_1 = \frac{p_1}{q}\ (p_2 > p_1)$ деп белгилесек, $(a^{\frac{1}{q}})^{p_2} > (a^{\frac{1}{q}})^{p_1}$, б. а. $a^{r_2} < a^{r_1}$ болот.

Эгер $0<a<1$ болсо, $r_2>r_1$ болгондо, $a^{r_2} < a^{r_1}$ болору жогоркуга окшош жеңил эле далилденет. Эми (1) ни далилдөөгө болот.

$$\lim_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{a^n}} \tag{5}$$

болорун эскерте кетүү керек. Ошондуктан a<1 болгондо (1) жана (5) формулалардын негизинде алдын ала берилген, каалаган $\varepsilon>0$ саны үчүн

$|a^{\frac{1}{N}} - 1| < \varepsilon$, $|a^{-\frac{1}{N}} - 1| < \varepsilon$, б. а. $1-\varepsilon < a^{\frac{1}{N}} < 1+\varepsilon$,

$1-\varepsilon < a^{-\frac{1}{N}} < 1+\varepsilon$

барабарсыздыктары аткарылгандай N натуралдык саны табылат.

Мындан $1-\varepsilon < a^{-\frac{1}{N}} < a^{\frac{1}{N}} < 1+\varepsilon$. Эгер $|r| < \frac{1}{N}$, б. а. $-\frac{1}{N} < r < \frac{1}{N}$ болсо, (4) негизинде $a^{-\frac{1}{N}} < a^r < a^{\frac{1}{N}}$ болот. Демек, $1-\varepsilon < a^r < 1+\varepsilon$, б. а. $|a^r - 1| < \varepsilon$, анда $\lim\limits_{r\to 0} a^r = 1$ экендиги далилденди.

$0<a<1$ болгон учур үчүн далилдөө жогоркуга окшош жүргүзүлөт.

Эми иррационалдуу көрсөткүчтүү даража жөнүндө түшүнүк киргизебиз.

Аныктама. a оң санынын α иррационалдуу көрсөткүчтүү a^α даражасы деп,

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^\alpha \tag{6}$$

пределин айтабыз. Мында r_n рационалдык сандардын α га жыйналуучу ар кандай удаалаштыгы. Бул аныктама мааниге ээ болсун үчүн (6) пределдин бар экенин далилдөө талап кылынат. Ал үчүн рационалдык сандардын α га жыйналуучу каалаган $r_1, r_2, r_3, .., r_n...$ удаалаштыгы үчүн, $a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \dots, a^{r_n} \dots$ тиешелүү удаалаштыгы ошол эле бир пределге ээ болорун далилдейбиз. Ошол предел a^{α} нын мааниси үчүн кабыл алынат. Чындыгында да α чекитинин каалаган аймагында рационалдуу чекиттер бар болгондуктан α га жыйналуучу монотондуу өсүүчү

$$r'_1, \; r'_2, \; r'_3, \; \dots, \; r'_n, \; \dots \tag{7}$$

удаалаштыгын түзүүгө болот.

Мисалы, мындай удаалаштык катарында α нын кеми менен алынган ондук жакындашуусунун удаалаштыгы алынат. Анда

$$a^{r'_1}, \; a^{r'_2}, \; a^{r'_3}, \; \dots, \; a^{r'_n}, \dots \tag{8}$$

тиешелүү удаалаштыгы $a>0$ болгондо, (4) негизинде монотондуу өсүүчү жана чектелген болот, бул удаалаштык мисалы r' саны α дан чоң болгон рационалдык сан болсо, $a^{r'_1}$ менен жогор жактан чектелет. Демек, (8) удаалаштык Вейерштрасстын теоремасынын негизинде чектүү пределге ээ болот, ал пределди A менен белгилесек

$$\lim_{n\to\infty} a^{r'_n} = A \tag{9}$$

болот.

Эми α га жыйналуучу рационалдык сандардын каалаган (r_n) удаалаштыгын алалы, б. а. $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \alpha$ (10)

болсун.

$\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = A$ болорун далилдейбиз. (7) жана (10) негизинде

$\lim\limits_{n\to\infty} (r_n - r'_n) = 0$. Анда (1) негизинде

$\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n - r'_n} = 1$ болот. $a^{r_n - r'_n} \cdot a^{r'_n} = a^{r_n}$ болорун эске алып,

бул барабардыктын эки жагында $n \longrightarrow \infty$ да пределге өтсөк, $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n - r'_n} \cdot \lim a^{r'_n} = 1.$ $A = A$ (11) ээ болобуз. (9) жана (11) ден $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r'_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = A$ келип чыгат, демек, (6) пределдин бар экендиги далилденди. Бул пределдин $0 < a < 1$ учурда да бар болору жогоркуга окшош далилденет.

Суроолор

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 5$ формуласын далилдегиле.

2. r_1 жана r_2 рационалдуу сандар болуп, $r_2 > r_1$ болсун, анда: а) $a > 1$ болгондо, $a^{r_2} > r^{r_1}$ болорун, б) $0 < a < 1$ болгондо $a^{r_2} < r^{r_1}$ болорун далилдегиле.

3. $\lim\limits_{n\to 0} a^r = 1$ $(a > 0)$ формуласын далилдегиле.

4. Иррационалдуу көрсөткүчтүү даражанын аныктамасын бергиле жана $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ пределинин бар экендигин далилдегиле, мында (r_n) рационалдуу сандардын α — иррационалдуу санына жыйналуучу каалаган удаалаштыгы.

2. Көрсөткүчтүү функция. $y = a^x$ (1) түрүндөгү функция көрсөткүчтүү функция деп аталат. Мында x — аргумент, y — функция, ал эми a болсо $a > 0$, $a \neq 1$ болгон берилген чыныгы сан.

Эскертүү. Эгер $a = 0$ болсо, x — терс болгондо, анда нөлгө бөлүү мүмкүн болбогондуктан маанисиздик келип чыгаар эле. Эгер $a < 0$ болсо, x — бөлүмү жуп сан болгон бөлчөк болгондо мнимый маанини алып калаар эле. Мисалы, мейли $a = -4$, $x = \frac{1}{2}$ болсун, анда $y = a^{-x} = \sqrt{-4} = 2i$. Эгер $a = 1$ болсо, көрсөткүчтүү функция x тин ар кандай маанисинде теңдеш түрдө 1 ге барабар болуп калат, ошондуктан бул учур кызыкчылык туудурбайт.

1. Аныкталуу областы. Бул функция бардык чыныгы сандардын көптүгүндө, б. а. $(-\infty, +\infty)$ аралыгында аныкталат. Чындыгында да:

1) $x = n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ болсо, $a^n = \underbrace{a\,a\,a \ldots a}_{n}.$

2) $x = -n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ болсо, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$

3. $x = \frac{p}{q}$ рационалдуу сан болсо, $a^{\frac{p}{q}} = (a^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$

4) $x=0$ болсо, $a^0=1$.

5) Эгер $x=\alpha$ — иррационалдуу сан болсо, анда a^{α} даражасы жогорудагыдай аныкталат. (§ 20, 1 ди кара).

2. $a^{-x}=\frac{1}{a^x}\neq\begin{cases} a^x \\ -a^x \end{cases}$ болгондуктан, бул функция жуп да, так да функция боло албайт.

3. Көрсөткүчтүү функция $(-\infty, +\infty)$ аралыгында үзгүлтүксүз. Каалаган белгиленип коюлган чекиттеги функциянын Δy өсүндүсүн табабыз:

$y+\Delta y=a^{x+\Delta x}$, $\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1)$. Мындан,

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}a^x(a^{\Delta x}-1)=0$, демек, $\Delta x\to 0$ да $\Delta y\to 0$, анда функция көрсөтүлгөн чекитте үзгүлтүксүз болот. Ал эми x чекити функциянын аныкталуу областынан эркибиз менен алынгандыктан, бул функция аныкталуу областынын каалаган чекитинде, б. а. $(-\infty, +\infty)$ аралыгында үзгүлтүксүз болот.

Эскертүү. Биз бул жерде далилдөөдө $\lim\limits_{\Delta x\to 0}a^{\Delta x}=$ $=1$ $(a>0)$ деп алдык. Мында Δx — чыныгы маанилерди алуучу өзгөрмө. Бул пределди так эле § 20, 1 дегидей табууга болот. Муну өз алдынча далилдөө окуучуларга сунуш кылынат.

4. Функциянын монотондуулук аралыктары, экстремалдык чекиттери. Элементардык жолду колдонуп изилдөө.

а) $a>1$, $x_2>x_1$, $a^{x_2}-a^{x_1}=a^{x_1}(a^{x_2-x_1}-1)>0$,

себеби: $a^{x_1}>0$ (муну төмөндө «10» дон карагыла, $a^{x_2-x_1}>$ $>1>0(x_2-x_1>0)$). Анда $a^{x_2}>a^{x_1}$, демек, бул учурда функция дайым өсүүчү болот.

б) $a<1$, $x_2>x_1$, мейли $а=\frac{1}{b}$, $(b>1)$ деп алалы.

$$a^{x_2}-a^{x_1}=\frac{1}{b^{x_2}}-\frac{1}{b^{x_1}}=\frac{b^{x_1}-b^{x_2}}{b^{x_2}b^{x_1}}<0,$$

себеби: $b^{x_2}\cdot b^{x_1}>0$, $b^{x_1}-b^{x_2}<0$. Анда $a^{x}{}_2<a^{x}{}_1$, демек, функция бул учурда дайыма кемүүчү болот. Бул айтылгандардан функциянын экстремалдык чекиттери жок экендиги келип чыгат.

Туундуну колдонуп изилдөө.

$y'=a^x\ln a$; $a^x>0$, эгер $a>1$ болсо, $\ln a>0$ болот. $a<1$ болсо, $\ln a<0$ болот (§ 20, 4 карагыла). Демек, $a>1$ болгондо, $y'>0$ болот да, функция дайыма өсүүчү, $a<1$ болгондо, $y'<0$ болот да, функция дайыма кемүүчү болот. Ошентип, функциянын экстремалдык чекиттери жок болот.

5. Функциянын томпоктугу, иймектиги жана ийилүү чекиттери.

Элементардык жолду колдонуп изилдөө.

$$A=\frac{a^{x_1}+a^{x_2}}{2}-a^{\frac{x_1+x_2}{2}}=\frac{1}{2}(a^{x_1}+a^{x_2}-2a^{\frac{x_1}{2}}a^{\frac{x_2}{2}})=\frac{1}{2}(a^{\frac{x_1}{2}}-$$

$$-a^{\frac{x_2}{2}})^2>0.$$

Демек, функция дайыма иймек болот. Ошондуктан анын графигинин ийилүү чекити жок болот.

Туундуну колдонуп изилдөө.

$y''=a^x\ln^2 a>0$, мында да жогоркудай эле корутундуга келебиз.

6. Функциянын чексиздеги өзгөрүшүн карайлы:

$$\lim_{x\to+\infty} a^x=+\infty \quad (a>1).$$

Далилдөө. Пределдин аныктамасы негизинде каалаган $M>0$ саны үчүн $x>\delta$ болгондо, $a^x>M$ барабарсыздыгы аткарылгандай $\delta>0$ саны бар болорун көрсөтөбүз. $a^x>M$ барабарсыздыгын логарифмдесек $x>\log_a M$ болот, демек, $\delta=\log_a M$ болот. Эми $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0 \quad (a>1)$ болорун далилдейбиз. Муну далилдөө үчүн $x=-t$ деп алып, өзгөрмөнү алмаштырабыз. Анда $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=\lim\limits_{t\to+\infty} a^{-t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{a^t}=0.$

Эгерде $0\leqslant a<1$ болсо, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=0,$ $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=+\infty$ болот.

Буларды өзүңөр далилдегиле.

7. «6» негизинде функциянын маанилеринин областы $(0, +\infty)$ аралыгы болот.

8. «7» негизинде функциянын эң чоң жана эң кичине мааниси жок болот.

9. «7» касиеттин негизинде функция төмөн жактан нөл менен чектелген, жогор жактан чектелген эмес.

10. Функциянын нөлдөрү жана белгилеринин туруктуу аралыктары. Ошол эле «7» касиет негизинде дайыма $a^x>0$, демек анын нөлү жок болот, $a^x>0$ дайыма аткарылаарын мындай да далилдөөгө болот.

1) $x=n(n=1, 2, 3, \ldots)$ болсо, $a^x=a^n$ дайыма оң сан болот. $x=-n(n=1, 2, 3, \ldots)$ болсо, $a^x=a^{-n}=\frac{1}{a^n}>0$ болот.

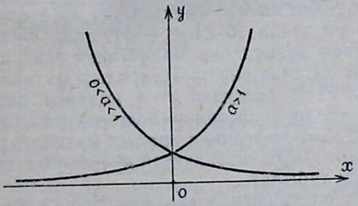
2) $x=0$ болсо, $a^0=1>0$ болот.

3) Эгер $x=\frac{p}{q}$ рационалдуу сан болсо (мында p, q натуралдык сандар), $a^x=\sqrt[q]{a^p}>0$ болот. $x=-\frac{p}{q}$ болсо, да $a^x=a^{-\frac{p}{q}}=\frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}>0$ болот.

Эгерде α иррационалдуу сан болсо, $r_1<\alpha<r_2$ болгудай $r_1<r_2$ рационалдуу сандары дайыма табылат. Анда $a>1$ болгондо, $a^{r_1}<a^{\alpha}<a^{r_2}$, мындан $0<a^{r_1}<a^{\alpha}$. Эгерде $0<a<1$ болсо, $a^{r_1}>a^{\alpha}>a^{r_2}$, анда $0<a^{r_2}<a^{\alpha}$ болот. Ошентип, x тин каалаган чыныгы маанисинде $a^x>0$.

11. Экинчи түрдөгү үзүлүү чекити жок болгондуктан, бул функциянын графигинин вертикаль асимптотасы жок. «6» нын негизинде $y=0$ *(OX огу)* функциянын графигинин горизонталь асимптотасы болот. Башка жантык асимптотасы жок болот (аны өзүңөр далилдегиле).

12. Функциянын графиги (60-чийме).



60-чийме

Суроолор

1. Көрсөткүчтүү функция деп кандай функцияны айтабыз?
2. Анын аныкталуу жана маанилеринин областы кандай аралыктар болот?
3. Бул функциянын үзгүлтүксүз экенин далилдегиле.
4. Көрсөткүчтүү функциянын монотондуулугу жана экстремалдык чекиттери жөнүндө эмне айтууга болот?
5. Бул функциянын иймектиги, томпоктугу жана ийилүү чекиттери жөнүндө айтып бергиле.
6. Берилген функциянын чексиздеги өзгөрүшүн мүнөздөп бергиле.

7. Функциянын нөлү жана белгилеринин турактуу аралыктары жөнүндө эмне билесиңер?

8. Бул функциянын кандай асимптоталары бар экенин көрсөтүп, $a>1$ жана $0<a<1$ учурлар үчүн графигин түзгүлө.

3. Логарифмдин бар болушу. Аныктама. Эгерде a, y жана x чыныгы сандарынын арасында $a^y=x$ катнашы орун алса, анда y саны, x санынын негизи a боюнча логарифми деп аталат жана $y=\log_a x$ деп жазылат.

Эскертүү: Эгер $a=e$ болсо, логарифм натуралдык деп аталат да, $y=\ln x$ деп жазылат, эгер $a=10$ болсо, логарифм ондук деп аталат жана $y=\lg x$ түрүндө жазылат.

Теорема (логарифмдин бар болушу жөнүндө). Эгерде $a>0$ жана $a\neq 1$ болсо, каалаган $b>0$ саны үчүн $a^\alpha=b$ болгудай, б. а. $\alpha=\log_a b$ болгудай бир гана чыныгы α саны бар болот.

Далилдөө. $x=a^y$ $(a>0,\ a=1)$ көрсөткүчтүү функциясынын (функцияны x менен белгиледик) аныкталуу областы бардык чыныгы сандардын көптүгү болуп $(-\infty<y<+\infty)$, маанилеринин областы оң сандардын көптүгү болуп $(0<x<+\infty)$, өзүнүн аныкталуу областында тыкыр түрдө монотондуу жана үзгүлтүксүз болору белгилүү.

Жогорудагы теоремада айтылган ар кандай $b>0$ саны үчүн α саны бар болушу үзгүлтүксүз функциянын аралык мааниси жөнүндөгү теоремадан[1], ал эми анын жалгыздыгы, көрсөткүчтүү функциянын тыкыр түрдө монотондуулугунан келип чыгат. Чындыгында да b саны каалаган оң сан болсун дейли $(0<b<+\infty)$, анда $x=a^\alpha$ үзгүлтүксүз функциясы өзүнүн бир маанисинен экинчи маанисине өткөндө жок дегенде бир жолу аралык маанилер аркылуу өтөт, демек, $a^\alpha=b$ болгудай $y=a$ мааниси бар болот, ал эми тыкыр түрдө монотондуу болгондуктан, $x=a^y$ функциясы 0 дөн $+\infty$ ге чейинки аралык маанилерди бир жолдон гана алып чыгат, ошондуктан $a^\alpha=b$ болгудай бир гана $y=\alpha$ мааниси табылат.

Ошентип, оң сандын логарифми бар болот. Терс сандын $a>0$ негизи боюнча логарифми (чыныгы) жок болот, себеби оң сандын каалаган даражасы оң сан болот, ошондуктан $x<0$ үчүн $x=a^y$ барабардыгы орун алышы мүмкүн эмес. Нөлдүн да чыныгы логарифми жок болот.

4. Логарифмалык функция. Көрсөткүчтүү функция $x=a^y$ $(a>0,\ a=1)$ өзүнүн аныкталуу областында $(-\infty<<y<+\infty)$ тыкыр түрдө монотондуу жана үзгүлтүксүз

---

[1] Мисалы, И. М. Уваренков, М. З. Маллер «Курс математического анализа». М., 1966, 212-бетти карагыла.

болуу менен маанилеринин областы $0<x<+\infty$ болору белгилүү. Ошондуктан тескери функциянын бар болушу жөнүндөгү теореманын негизинде (§ 13 карагыла) көрсөткүчтүү функцияга тескери болгон, $0<x<+\infty$ аралыгы аныкталуу областы болуп, ушул аныкталуу областында тыкыр түрдө монотондуу жана үзгүлтүксүз болгон, маанилеринин областы $-\infty<y<+\infty$ болгон функция сөзсүз бар болот. Ошол функцияны логарифмдик функция деп атайбыз жана $y=log_a x$ деп белгилейбиз. Аныктаманын негизинде $x = a^{\log_a x}$ жана $y=log_a a^y$ деп жазууга болот.

1. Логарифмдик функциянын аныкталуу областы $(0, +\infty)$ аралыгы болот, бул жогор жакта көрсөтүлдү.

2. Берилген функциянын аныкталуу областы $(0, +\infty)$ аралыгы болуп, координаталар башталышына симметриялуу болбогондуктан, анын жуптугу жана тактыгы жөнүндө айтуу маанисиз болот.

3. Бул функциянын үзгүлтүксүз болору да жогор жакта көрсөтүлдү.

4. Функциянын монотондуулук аралыктары жана экстремалдык чекиттери. $a>1$ болсо, логарифмдик функция өсүүчү, $a<1$ болгондо кемүүчү болот, экстремалдык чекиттери жок болот. Бул касиет тескери функциянын бар болушу жөнүндөгү теореманын негизинде көрсөткүчтүү функциянын тиешелүү касиетинен түздөн түз келип чыгарын жогору жакта көрдүк.

Туундуну колдонуп изилдөө.

$y' = \frac{1}{x\ln a}$, $y' \neq 0$. Мында $x>0$ болгондуктан, $a>1$ болгондо, $\ln a>0$ («10» ну карагыла) болуп, $y'>0$ болот да функция өсүүчү болот; $a<1$ болгондо, $\ln a<0$ («10» карагыла) болуп, $y'<0$ болот да, функция кемүүчү болот. Функциянын экстремалдык чекиттери жок болору көрүнүп турат.

5. Функциянын томпоктугу, ийиектиги жана ийилүү чекиттери. Элементрдык жолду колдонуп изилдөө.

$$A=\frac{\log_a x_1+\log a\, x_2}{2}-\log_a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\log_a\sqrt{x_1x_2}-\log_a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

Барабар эмес оң сандардын орто арифметикалыгы орто геометриялыгынан чоң болгондуктан, $\sqrt{x_1x_2}<\frac{x_1+x_2}{2}$ болот, $a>1$ болгондо функция өсүүчү болгондуктан, $\log_a\sqrt{x_1x_2}<\log_a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ болот, демек, $A<0$, анда функция томпок, $a<1$ болгондо, функция кемүүчү болгондуктан, $A>0$, демек, бул учурда функция иймек. Мындан функциянын ийилүү чекити жок экендиги келип чыгат.

Туундуну колдонуп изилдөө.

$y''=-\frac{1}{x^2 \ln a}\neq 0$, $a>1$ болгондо, $y''<0$ болуп, функция томпок болот. $a<1$ болгондо, $y''>0$ болуп, функция иймек болот. Функциянын ийилүү чекити жок болот.

6. Функциянын чексиздеги жана нөл чекитинин аймагындагы өзгөрүүсү.

$a>1$ болгондо, $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0}\log_a x=-\infty$

себеби:

$a>1$ болгондо, $\lim\limits_{y\to\infty}a^y=+\infty$, $\lim\limits_{y\to-\infty}a^y=0$.

$a<1$ болгондо, $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0}\log_a x=+\infty$

себеби:

$a<1$ болгондо, $\lim\limits_{y\to+\infty}a^y=0$, $\lim\limits_{y\to-\infty}a^y=-\infty$.

7. Функциянын маанилеринин областы $(-\infty, +\infty)$ аралыгы болору жогору жакта көрсөтүлгөн «6» касиеттин негизинде да ушундай болору көрүнүп турат.

8. «7» касиеттин негизинде, функциянын эң чоң жана эң кичине маанилери жок.

9. Ошол эле «7» касиеттин негизинде функция чектелбеген болот.

10. Функциянын нөлү жана белгилеринин турактуу аралыктары.

$\log_a x=0$, $a^0=x$, $x=1$. Демек, $x=1$ чекити функциянын нөлү болот. Мындан функция тыкыр түрдө монотондуу болгондуктан,

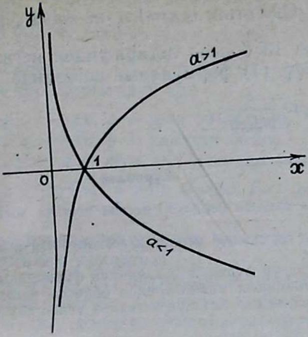
а) $a>1$, $x>1$ болгондо, $\log_a x>0$; $0<x<1$ болгондо, $\log_a x<0$ болот.

б) $a<1$, $x>1$ болгондо, $\log_a x<0$; $0<x<1$ болгондо, $\log_a x>0$ болот.

11. «6» касиеттин негизинде функциянын вертикаль асимптотасы $x=0$ сызыгы ($OУ$ огу) болот. Башка асимптоталары жок экенине өзүңөр текшерип ишенгиле.

12. Функциянын графиги (61-чийме).

5. Бир эле сандын ар түрдүү негиздеги логарифмдеринин арасындагы өз ара байланыш. Бир эле x санынын ар түрдүү a жана b негиздериндеги логарифмдеринин ара-



61-чийме

сындагы орун алган байланышты карап көрөлү. Логарифмдин аныктамасынын негизинде $x = b^{\log_b x}$ жана $x = a^{\log_a x}$ деп жаза алабыз. Анда $b^{\log_b x} = a^{\log_a x}$. Бул барабардыктын эки жагын a негизи боюнча логарифмдеп, $\log_b x \log_\alpha b = \log_\alpha x$ ке ээ болобуз. Мында $\log_\alpha a = 1$ экени эске алынды. Табылган барабардыкты

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} \tag{1}$$

деп жазуу ыңгайлуу болот. Бул формула a негизи боюнча логарифмден, негизи b болгон логарифмге өтүүнүн формуласы болот. (1) формула практикада эгер бизге берилген сандын кандайдыр бир a негизиндеги логарифми белгилүү болсо, ага карап, ал сандын башка бир b негиздеги логарифмин табууга мүмкүндүк берет.

Негизи a болгон логарифмден негизи b болгон логарифмге өтүүдө, $x > 0$ бардык сандардын логарифми, ошол эле бир $m = \frac{1}{\log_a b}$ санына көбөйтүлөт. Бул сан x ке көз каранды эмес болуп, өтүүнүн модулу деп аталат. Мисалдар. 1) Натуралдык логарифмден ондук логарифмге жана тескерисинче өтүү. (1) формула боюнча $\lg x = \ln x \frac{1}{\ln 10}$.

Мында $e = 2{,}718281...$ Өтүүнүн модулу $m = \frac{1}{\ln 10} = \ln e =$

$= 0{,}43429\ldots$ Ошентип, $\lg x = \ln x \cdot m$ жана $\ln x = \lg x \cdot \frac{1}{m}$.

2) Негизи 13 болгон логарифмден негизи 3 болгон логарифмге өтүү. (1) формуланын негизинде

$$\log_3 x = \log_{13} x \cdot \frac{1}{\log_{13} 3}.$$

Суроолор

1. Берилген сандын берилген негизи боюнча логарифми деп эмнени айтабыз?
2. Берилген оң сандын берилген негизи боюнча логарифми бар экенин көрсөткүлө.
3. Логарифмдүү функция деп, кандай функцияны айтабыз?
4. Бул функциянын маанилеринин областы жана аныкталуу областары кандай аралыктар болорун негиздөө менен көрсөткүлө.
5. Берилген функциянын монотондуулук, үзгүлтүксүздүк касиеттерин негиздөө менен айтып бергиле.
6. Бул функциянын томпоктугу, ийиектиги жана ийилүү чекиттери жөнүндө эмне айтууга болот?
7. Логарифмдүү функциянын чексиздеги жана нөл чекитинин аймагындагы өзгөрүүсүн мүнөздөгүлө жана асимптоталарын көрсөткүлө.
8. Бул функциянын нөлү жана белгилеринин турактуу аралыктары жөнүндө эмне билесиңер?
9. Бир эле сандын ар түрдүү негиздеги логарифмдеринин арасындагы кандай байланыштар бар жана аны билүүнүн практикада кандай пайдасы бар?

6. Каалаган чыныгы көрсөткүчтүү даражалуу функция. Биз жогоруда натуралдуу, терс бүтүн, оң бөлчөк жана терс бөлчөк көрсөткүчтүү даражалуу функцияларды, б. а. рационалдуу көрсөткүчтүү даражалуу функцияларды карадык. § 21, 1 де иррационалдуу көрсөткүчтүү даражага аныктама берип, анын бар экендигин далилдедик. Ушунун негизинде биз иррационалдуу көрсөткүчтүү даражалуу функцияны да карай алабыз.

Аныктама. $y = x^{\alpha}$ функциясын, α — берилген иррационалдуу сан болгондо, иррационалдуу көрсөткүчтүү даражалуу функция деп айтабыз. Мында x — аргумент, y — функция болот. Бул функциянын аныкталуу областы $\alpha > 0$ болгондо, $[0, +\infty)$ аралыгы, $\alpha < 0$ болгондо, $(0, +\infty)$ аралыгы болорун көрүү кыйын эмес. Ошондуктан жалпы алганда иррационалдуу даражалуу функциянын аныкталуу областы үчүн $(0, +\infty)$ аралыгы алынат, ушундай алуунун керектиги жогоруда келтирилген иррационалдуу көрсөткүчтүү даражанын аныктамасынан да келип чыгат (§ 20, 1 ди карагыла).

Эскертүү. Иррационалдуу көрсөткүчтүү даражалуу функция $(-\infty, 0)$ аралыгында аныкталбайт. Буга төмөнкүдөн ишенүүгө болот. Мейли, $y=a$, $a<0$, $r=\frac{p}{q}$ — кыскарбас бөлчөк болсун.

α — берилген иррационалдуу сан.

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} \begin{cases} >0, \text{ эгер } q \text{ — так, } p \text{ — жуп сан болсо,} \\ <0, \text{ эгер } q \text{ — так, } p \text{ — так сан болсо,} \\ \text{болбойт, эгер } q \text{ — жуп, } p \text{ — так сан болсо.} \end{cases}$$

Демек, $\lim\limits_{r\to\alpha} a^r$ предели жок болот. Биз жогоруда айтылгандардын негизинде жалпы эле чыныгы көрсөткүчтүү даражалуу функцияны карайбыз.

Аныктама. $y=x^\alpha$ (1) функциясы, α — каалаган берилген чыныгы сан болгондо, чыныгы көрсөткүчтүү даражалуу функция деп аталат. Мында x — аргумент, y — функция.

1. Аныкталуу областы, α — рационалдуу болгон учурда жана α — иррационалдуу сан болгондо, $y=x^\alpha$ функциясынын аныкталуу областтарынын кесилиши (жалпы бөлүгү) $(0, +\infty)$ аралыгы болгондуктан, жалпы чыныгы көрсөткүчтүү даражалуу функциянын аныкталуу областы $(0, +\infty)$ аралыгы болот.

2. Бул функциянын аныкталуу областы координата башталышына симметриялуу болбогондуктан, анын жуп, тактыгы жөнүндө айтуунун өзү маанисиз.

3. Функциянын үзгүлтүксүздүгү. Жалпы чыныгы көрсөткүчтүү даражалуу функцияны изилдөө үчүн, аны

$$y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \qquad (2)$$

түрүндө көрсөтүп алуу ыңгайлуу, мында $x = a^{\log_a x}$ теңдештиги негизинде жазылган, $x=a^{\ln x}$ теңдештиги пайдаланылды. $u=\alpha\ln x$ жана $y=e^u$ функциялары үзгүлтүксүз болгондуктан, татаал функциянын үзгүлтүксүздүгүнүн негизинде берилген функция да үзгүлтүксүз болот.

4. Функциянын монотондуулугу, экстремалдык маанилери.

Элементардык жолду колдонуп изилдөө.

(2) негизинде $\alpha>0$ болгондо, $e^{\alpha\ln x}$ көрсөткүчтүү функциясы өсүүчү болгондуктан (негизи $e^\alpha>1$), берилген (1) функция да өсүүчү болот. Эгерде $\alpha<0$ болсо, $e^{\alpha\ln x}$ — көрсөткүчтүү функциясы кемүүчү болгондуктан (негизи $e^\alpha<1$), (1) функция да кемүүчү болот. Ошентип, экстремалдык чекиттери жок болот.

Туундуну колдонуп изилдөө.

$y'=\alpha x^{\alpha-1}$, $x^{\alpha-1}>0$ эгер $\alpha>0$ болсо, $y'>0$, функция өсүүчү, эгер $\alpha<0$ болсо, $y'<0$ функция кемүүчү, демек, функциянын экстремалдык чекиттери жок.

5. Функциянын томпоктугу, иймектиги жана ийилүү чекиттери. Туундуну колдонуп изилдөө менен чектелебиз.

$y''=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$; $x^{\alpha-2}>0$.

а) $\alpha>1$ болсо, $y''>0$ функция иймек.

б) $0<\alpha<1$ болсо, $y''<0$ функция томпок.

в) $\alpha<0$ болсо, $y''>0$ функция иймек.

г) $\alpha=0$ $y=x^0=1$, $y''=0$ функциянын графиги $y=1$ түз сызык болуп, ал иймек да, томпок да болбойт.

д) $\alpha=1$ болсо, $y=x$, $y''=0$ графиги түз сызык болуп, иймек да жана томпок да болбойт. Бул айтылгандардан функциянын графигинин ийилүү чекити жок болору келип чыгат.

6. Функциянын чексиздеги жана нөл чекитинин аймагындагы өзгөрүүсү.

$$\text{а) } \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} = \begin{cases} +\infty, & \text{эгер } \alpha>0, \\ 0, & \text{эгер } \alpha<0, \end{cases}$$

себеби: $\alpha>0$ болсо, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ болгондуктан, көрсөткүчтүү $e^{\alpha\ln x}$ функциясы үчүн $\lim\limits_{\ln x\to+\infty} e^{\alpha\ln x}=+\infty$ (негизи $e^{\alpha}>1$).

$\alpha<0$ болсо, $\lim\limits_{\mathrm{nl}\, x\to+\infty} e^{\alpha\ln x}=0$ (негизи $e^{\alpha}<1$).

$$\text{б) } \lim_{\substack{x\to0\\(x>0)}} x^{\alpha} = \begin{cases} 0, & \text{эгер } \alpha>0, \\ +\infty, & \text{эгер } \alpha<0. \end{cases}$$

Себеби: $\alpha>0$ болсо, $\lim\limits_{x\to0} \ln x=-\infty$ болгондуктан, көрсөткүчтүү функция $e^{\alpha\ln x}$ үчүн $\lim\limits_{\ln x\to-\infty} e^{\alpha\ln x}=0$ (негизи $e^{\alpha}>1$)

$\alpha<0$ болсо, $\lim\limits_{\ln x\to+\infty} e^{\alpha\ln x}=+\infty$ (негизи $e^{\alpha}<1$).

7. «3», «4» жана «6» касиеттердин негизинде (1) функциянын маанилеринин областы $(0, +\infty)$ аралыгы болот.

8. «7» негизинде бул функциянын эң чоң, эң кичине мааниси жок.

9. Ошол эле «7» негизинде функция жогор жактан чектелген эмес, төмөн жактан нөл менен чектелген.

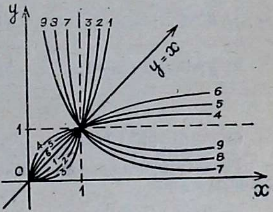
10. «7» касиеттин негизинде функциянын нөлү жок жана бардык аныкталуу областында (1) функция оң мааниге ээ.

11. «6» касиеттин негизинде $\alpha<0$ болгондо, $y=0$ жана $x=0$ сызыктары (б. а. OX, OY октору) функциянын графигинин асимптоталары болот. Башка асимптоталары жана $a>0$ учурунда асимптоталары жок экенин өзүңөр текшерип ишенгиле.

12. Функциянын графиги. Адегенде α маанисине жараша (1) функциянын графиктеринин өз ара жайланыштарын карап көрөлү. Бардык графиктер (1) функция үчүн (1, 1) чекити аркылуу өтөрү көрүнүп турат.
Мейли, $\alpha_2>\alpha_1$ болсун.

$$x^{\alpha_2}-x^{\alpha}=x^{\alpha_1}(x^{\alpha_2-\alpha_1})=\begin{cases}>0, & \text{эгер } x>1,\\ =0, & \text{эгер } x=1\\ <0, & \text{эгер } 0<x<1.\end{cases}$$

Демек, (0, 1) аралыгында $x^{\alpha_1}>x^{\alpha_2}$, б. а. бул аралыкта x^{α_1}дин графиги x^{α_2}нин графигинин жогору жагынан орун алат. $(1, +\infty)$ аралыгында $x^{\alpha_2}>x^{\alpha_1}$ болуп, x^{α} нин графиги x^{α_1} дин графигинин жогору жагынан орун алат (62-чийме).



62-чийме

1) $y=x^{\alpha_1}$, 2) $y=x^{\alpha_2}$,

3) $y=x^{\alpha_3}$, 4) $y=x^{\alpha_4}$,

5) $y=x^{\alpha_5}$, 6) $y=x^{\alpha_6}$,

7) $y=x^{\alpha_7}$, 8) $y=x^{\alpha_8}$,

9) $y=x^{\alpha_9}$,

$\alpha_3>\alpha_2>x_1>1$, $1>\alpha_6>\alpha_5>\alpha_4>0$, $0>\alpha_9>\alpha_8>\alpha_7$.

Суроолор

1. Иррационалдуу көрсөткүчтүү даражалуу функция деп кандай функцияны айтабыз, анын аныкталуу областы кандай аралык болот?
2. Чыныгы көрсөткүчтүү даражалуу функция деп кандай функцияны айтабыз? Анын аныкталуу областы кандай сандардын көптүгү болот?
3. Бул функциянын үзгүлтүксүз экенин көрсөткүлө.
4. Берилген функциянын монотондуулугун элементардык жолду жана туундуну колдонуп далилдегиле.
5. Функциянын томпоктугу жана ийmeктиги, ийилүү чекиттери жөнүндө эмне билесиңер?
6. Функциянын чексиздеги жана нөл чекитинин аймагындагы өзгөрүүсүн мүнөздөгүлө жана асимптоталарын көрсөткүлө.
7. Бул функциянын маанилеринин областы, чектелгени, чектелбегени жөнүндө эмне айта аласыңар?

8. Берилген функциянын $\alpha>1$, $0<\alpha<1$, $\alpha<0$ болгон учурлары үчүн графигин түзгүлө, α га жараша графиктердин өз ара жайланыштарын түшүндүргүлө.

Көнүгүүлөр

147. Жогоруда изилденген касиеттер боюнча төмөнкү функциянын графигин түзүп, графиги боюнча касиеттерин айтып бергиле:

1) $y=y^x$; 2) $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$; 3) $y=\log_5 x$; 4) $y=\mathrm{lcg}^{\frac{3}{4}}\, x$;

5) $y=\ln x$; 6) $y=x^{\sqrt{2}}$; 7) $y=x^{-\sqrt{3}}$.

148. Бир эле чиймеге изилденген касиеттер боюнча төмөнкү функциялардын графиктерин түзгүлө:

1) $y=x^{\sqrt{2{,}25}}$; 2) $y=x^2$; 3) $y=x^{-\sqrt{0{,}7}}$; 4) $y=x^{\frac{2}{3}}$;

5) $y=x^{-\sqrt{5}}$; 6) $y=x^{-4{,}5}$.

149. Төмөнкү функциялардын графиктерин, графиктерди жөнөкөй өзгөртүп түзүү эрежелери боюнча түзүп, график боюнча касиеттерин айтып бергиле:

1) $y=3^{x-1}$; 2) $y=\left(\frac{2}{5}\right)^{x+2}$; 3) $y=2\lg x$;

4) $y=\log_3(x+2)+1$; 5) $y=\frac{1}{2}\,\mathrm{lcg}_{\frac{5}{4}}(x-1)-2$;

6) $y=(x+2)^{-\sqrt{5}}$; 7) $y=(x-1)^{\sqrt[3]{2}}+4$.

Төмөнкү функциялардын касиеттерин алдын ала изилдеп алып, графигин түзгүлө:

150. $y=3.^{x^2-2}$

151. $y=2^{\log_3 x}$.

152. $y=\frac{e^x}{x}$.

153. $y=\frac{1}{2}\log_2(x-1)^2$.

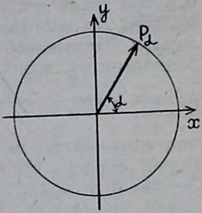
154. $y=\log_2(1-x^2)$.

155. $y=x+\ln(x^2-1)$.

§ 21. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ФУНКЦИЯЛАР

1. Кыскача жалпы обзор. Тригонометриялык функциялар ар кандай бурчтун функциясы катарында мектептин математикасында төмөнкүдөй аныктамалары менен бел-

Аныктамалар. Бирдик айлананын $P_0=M(1,0)$ чекитинин координаталар башталышынын айланасында α бурчуна буруудан алынган P_α чекитинин ординатасы, α бурчунун синусу деп аталат, ал эми ушул эле чекиттин абсциссасы α бурчунун косинусу деп аталат.



63-чийме

Бурчтун синусунун анын косинусуна болгон катышы, ал бурчтун тангенси деп аталат: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Бурчтун косинусунун анын синусуна болгон катышы, ал бурчтун котангенси деп аталат: $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$. $\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$.

Кийинки экөө башкаларынан аз колдонулат.

Тригонометриялык функцияларга карата чыгарылган эрежелер, касиеттер, корутундулар жалпы мүнөзгө ээ болсун үчүн, анын илим менен техникада колдонулушу кеңири болсун үчүн тригонометриялык функцияларды бурчтун функциясы катарында кароо менен чектелбей, ар кандай чыныгы сан аргументинин функциясы катарында кароого жетишүүбүз керек. Мисалы, эгерде тригонометриялык функцияларды бурчтун гана функциясы деп эсептесек, $2x^2+x+x\cdot\cos x^2$ сыяктуу туюнтмаларды карай албас элек, себеби: бурчту даражага көтөрүүнү, бурч менен санды кошууну ж. б. кандай мааниде түшүнүү керектигин биз билбейбиз, ошондуктан, мындай операцияларды аткаруу маанисиз болот. Тригонометриялык функцияларды сан аргументинин функциясы катарында кароо бизди бул сыяктуу кыйынчылыктардан, чектөөлөрдөн куткарат.

Тригонометриялык функциялардын аргументин сан катарында кароого, б. а. алардын аргументи бурчтун (жаанын) өзү дебестен, алардын чоңдугун туюнткан сан болот деп кабыл алууга толук мүмкүн. Мында бурчту градустук бирдиктерде эмес, радиандарда ченөө кабыл алынган. Муну мындай түшүнүү керек: x санынын косинусу деп, чоңдугу x радианга барабар болгон бурчтун косинусун айтабыз, x санынын тангенси деп, чоңдугу x радианга барабар болгон бурчтун тангенсин айтабыз. $\sin x$, $\operatorname{ctg}x$ ж. б. функциялары сан аргументинин функциясы катарында ушул сыяктуу аныкталат. Мисалы, $\cos 3$ (3 санынын косинусу) чоңдугу үч радианга барабар бурчтун косинусу болот, $\operatorname{tg}\sqrt{15}$ ($\sqrt{15}$ санынын тангенси) чоңдугу $\sqrt{15}$ радианга барабар бурчтун тангенси, $\sin 2=\sin 2$ рад$\approx\sin 114°36'=$ $=0{,}909$ ж. б.

Тригонометриялык функцияларды сан аргументинин функциясы катарында аныктаганда, анын аргументи үчүн бурчтун градустук ченин туюнткан сан кабыл алынбастан, бурчтун радиандык ченин көрсөткөн сан кабыл алынганын көрдүк. Мунун себеби: теориялык мүнөздөгү кырдаалга байланыштуу, мында иштин жөн жайы биринчи эң сонун предел деген ат менен белгилүү болгон, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ пределинин жөнөкөй түрдө туюндургудай (б. а. 1 ге барабар болгудай) бурчтун ченөө бирдигин тандап алууга алып келет. Эгерде бул предел 1 ге барабар болсо, математикалык анализдин (туунду алуунун, интеграл алуунун, функцияны даражалуу катарга ажыратуунун) тригонометриялык функцияларга байланыштуу формулалары жөнөкөйлөнөт (буга окуучулар мындан ары өздөрү түздөн түз кез келгенде ишенишет).

Бурчтун чоңдугун ченөө үчүн чен бирдик катарында радиан тандалып алынганда гана, аргумент үчүн бурчтун чоңдугунун радиандык ченин көрсөткөн сан кабыл алынганда гана $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ болот. Эгер, мисалы, бурчтун чоңдугу градустук чен бирдиги менен ченелсе $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{180}\approx$ $\approx 0{,}01453$ болуп, математикалык анализдин тиешелүү формулалары татаалдап кетет.

Бирок бурчтун градустук ченинин практикалык ченөөлөрдө ыңгайлуу экенин айта кетүү керек, толук айланада 360° болуп, толук айлана градустук чен бирдик менен өлчөмдөш болгондуктан, ченөөнүн натыйжасы көп убакта рационалдык сан менен туюнтулат. Ал эми толук айланада 2π радиан болгондуктан, радиандык ченди пайдаланганда ченөөнүн натыйжасы көп учурда иррационалдык сан менен туюнтулат. Бул болсо практикалык ченөөлөр үчүн ыңгайлуу эмес. Ошентип, теориялык маселелерде бурчтун радиандык ченин, практикалык ченөөлөрдө градустук ченин пайдалануу ыңгайлуу. Биз мындан ары тригонометриялык функцияларды каалаган чыныгы сан аргументинин функциясы катарында карайбыз.

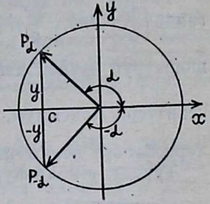
Элементардык функциялардын ичинен тригонометриялык функциялар гана мезгилдүү экени белгилүү (§ 6 карагыла). Тригонометриялык функциялардын ар бирөөнү изилдөөнү өз алдынча жүргүзүү максатка ылайыктуу.

Суроолор

1. Ар кандай бурчтун синусун аныктагыла.
2. Ар кандай бурчтун косинусунун аныктамасы кандай айтылат?
3. Ар кандай бурчтун тангенсин жана котангенсин аныктагыла.
4. Ар кандай чыныгы сан аргументинин тригонометриялык функцияларынын аныктамасы жөнүндө эмне билесиңер?
5. Эмне үчүн сан аргументинин тригонометриялык функциялары деген түшүнүктөр киргизилет?
6. Сан аргументинин тригонометриялык функцияларын караганда эмне үчүн аргумент үчүн бурчтун радиандык ченин көрсөткөн сан кабыл алынат?

2. y=sinx функциясы. 1. Бирдик айлананын P_0 (1, 0) чекитин координаталардын башталышынын айланасында каалагандай чоңдуктагы бурчка бурууга жана аны тиешелүү түрдө каалагандай чыныгы сан менен туюнтуута боло тургандыктан $y=\sin x$ функциясынын аныктамасы негизинде, бул функциянын аныкталуу областы $(-\infty, +\infty)$ аралыгы болот.

2. $y=\sin x$ функциясы так функция. Биз муну далилдөө үчүн сан аргументинин тригонометриялык функцияларынын аныктамасы, алардын геометриялык аныктамасы менен тыгыз байланыштуу берилгендиктен чиймени пайдаланабыз (64-чийме). $\sin\alpha=y$, $\sin(-\alpha)=-y$. $-y=-\sin\alpha$, мындан $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$.



64-чийме

3. Бул функция үзгүлтүксүз, себеби:

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Мындан $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta\, y=0.$

4. Функциянын монотондуулук аралыктары, экстремалдык чекиттери. Элементардык жолду колдонуп изилдөө.

а) $-\frac{\pi}{2}<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$ болсун, $\sin x_2-\sin x_1=$

$-\frac{\pi}{2}<x_1<+\frac{\pi}{2}$ $\qquad =2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}.$

+

$-\quad -\frac{\pi}{2}<x_2<+\frac{\pi}{2}$

$$\begin{array}{c} -\frac{\pi}{2} < x_2 < +\frac{\pi}{2} \\ \hline -\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2} \end{array}$$

Мындан $0 < \cos\frac{x_1 + x_2}{2} < 1$.

$$\begin{array}{c} +\frac{\pi}{2} > x_1 > -\frac{\pi}{2} \\ \hline -\frac{\pi}{2} < \frac{x_2 - x_1}{2} < +\frac{\pi}{2} \end{array}$$

Шарт боюнча $x_2 - x_1 > 0$ болгондуктан, $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$.

Анда $0 < \sin\frac{x_2 - x_1}{2} < 1$.

Демек, $\sin x_2 > \sin x_1$. Функция $\left(-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right)$ аралыгында, жалпы алганда $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; +\frac{\pi}{2} + 2\pi x\right)$ аралыгында өсүүчү ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$) болот.

б) Бул функцияны $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ аралыгында, жалпы алганда $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$ аралыгында кемий турганын окшоштуруп өзүңөр далилдегиле. Бул айтылгандан $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ чекиттери максимум, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ чекиттери минимум чекиттери болору келип чыгат.

Туундуну колдонуп изилдөө.

$y' = \cos x$. $\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$. $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$ аралыгында $y' > 0$, функция өсүүчү, $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$ аралыгында $y' < 0$, функция кемүүчү (§ 21, 3, 10-касиеттерди карагыла) болот. Демек, жогоруда айтылган чекиттер экстремалдык чекиттери болот.

$$y_{max} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = 1, \ y_{min} = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = -1.$$

5. Функциянын томпоктугу, ийиктиги жана ийилүү чекиттери.

Элементардык жолду колдонуп изилдөө.

$$A = \frac{f(x_1) + f(x_1)}{2} - f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right);$$

$$A=\frac{\sin x_1+\sin x_2}{2}-\sin\frac{x_1+x_2}{2}=\sin\frac{x_1+x_2}{2}\cos\frac{x_1+x_2}{2}-$$

$$-\sin\frac{x_1+x_2}{2}=\sin\frac{x_1+x_2}{2}\left(\cos\frac{x_1-x_2}{2}\right)-1\ \ ;\ x_1\mp x_2.$$

а)
$$+\begin{array}{c}-\pi<x_1<0\\ -\pi<x_2<0\\ \hline -\pi<\frac{x_1+x_2}{2}<0\end{array}$$

Мындан $\sin\frac{x_1+x_2}{2}<0.$

$$-\begin{array}{c}-\pi<x_1<0\\ 0>x_2>-\pi\\ \hline -\frac{\pi}{2}<\frac{x_1-x_2}{2}<\frac{\pi}{2}\end{array}$$

$$0<\cos\frac{x_1-x_2}{2}<1.$$

$x_1\neq x_2,\ \frac{x_1-x_2}{2}\neq 0,$

$\cos\frac{x_1-x_2}{2}\neq 1$ болот.

Демек, $\cos\frac{x_1-x_2}{2}-1<0.$

Ошентип, $A>0$, функция $(-\pi,\ 0)$ аралыгында, жалпы алганда $(-\pi+2\pi k,\ 2\pi k)$ аралыгында иймек болот.

б) $y=\sin x$ функциясы так болгондуктан, функция $(0,\ \pi)$ аралыгында, жалпы алганда $(2\pi k,\ \pi+2\pi k)$ аралыгында так функциянын иймектиги жана томпоктугу жөнүндөгү теореманын негизинде (§ 9 карагыла) томпок болот. Бул айтылгандардын негизинде πk—чекиттери функциянын ийилүү чекиттери болот.

Туундуну колдонуп изилдөө.

$y''=-\sin x$, $\sin x=0$, $x=\pi k(-\pi+2\pi k,\ 2\pi k)$ аралыгында $y''>0$, функция иймек, $(2\pi k,\ \pi+2\pi k)$ аралыгында $y''<0$, функция томпок (16-касиетти карагыла). Демек, πk чекиттери функциянын ийилүү чекиттери болот.

6. $y=\sin x$ функциясы мезгилдүү болгондуктан, $x\to\pm\infty$ болгондо предели жок болот.

7. «4», «6» касиеттердин негизинде $[-1,\ +1]$ кесиндиси функциянын маанилеринин областы болот.

8. Функциянын эң чоң мааниси $+1$, эң кичине мааниси -1 менен чектелет.

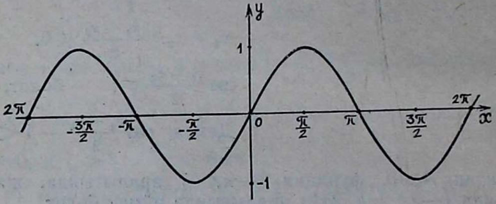
9. Функция жогор жактан $+1$, төмөн жактан -1 менен чектелет.

10. Бирдик айлананын чекитинин ординатасы α бурчунун чоңдугу, б. а. аны туюнтуучу сан 0 же π болгондо, жалпы алганда πk $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$ болгондо, 0 гө барабар болот (63-чиймени карагыла), б. а. $y=\sin x$ функциясынын нөлү πk чекиттери болот.

Бул функциянын аныктамасынан бирдик айлананын чекитинин ординатасы жогорку жарым тегиздикте (1—2-чейректерде) оң болгондуктан, $(2\pi k, \pi+2\pi k)$ аралыгында $\sin x>0$ болот. Бирдик айлананын чекитинин ординатасы төмөнкү жарым тегиздикте (3—4-чейректерде) терс болгондуктан, $(-\pi+2\pi k, 2\pi k)$ аралыгында $\sin x<0$ болот.

11. Бул функциянын асимптоталары жок экендигине ишенүү кыйын эмес.

12. Функциянын графиги (65-чийме), синусоида деп аталган ийри сызык болот.



65-чийме

Суроолор

1. $y=\sin x$ функциясынын аныктамасын айтып бергиле.
2. Бул функциянын аныкталуу областы кандай аралык болот?
3. Берилген функциянын жуп, тактыгы жөнүндө эмне билесиңер?
4. Функциянын үзгүлтүксүздүгүн далилдегиле.
5. Функциянын монотондуулук аралыктары, экстремалдык чекиттери жөнүндө айтып бергиле.
6. Бул функциянын иймектиги, томпоктугу жана ийилүү чекиттери жөнүндө эмне билесиңер?
7. Берилген функциянын чектелгенин жана чектелбегендигин айтып бергиле.
8. Функциянын нөлү, белгилеринин туруктуу аралыктары кандай?
9. Бул функциянын графигин сызып, графиги боюнча касиеттерин айтып бергиле.

3. y=cosx функциясы. 1. Бирдик айлананын P_0 (1, 0) чекитин координаталардын башталышынын айланасында каалагандай чоңдуктагы бурчка бурууга боло тургандыктан, ал бурчту тиешелүү түрдө каалагандай чыныгы сан менен туюнтууга боло тургандыктан, косинус функциясынын аныктамасынын негизинде $(-\infty; +\infty)$ аралыгы бул функциянын аныкталуу областы болот.

2. $y=\cos x$ функциясы жуп функция болот, себеби: $\cos\alpha=x$, $\cos(-\alpha)=x$ (64-чиймени карагыла). Анда $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$.

3. Берилген функция үзгүлтүксүз, себеби:

$$\Delta y = \cos(x+\Delta x) - \cos x = -2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Мындан $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.$

4. Функциянын монотондуулук аралыктары, экстремалдык чекиттери.

Элементардык жолду колдонуп изилдөө.

а) $0<x_1<x_2<\pi$ болсун,

$$\cos x_2 - \cos x_1 = -2\sin\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}.$$

$$\begin{array}{rc} + & 0<x_2<\pi \\ & 0<x_1<\pi \\ \hline & 0<\frac{x_1+x_2}{2}<\pi \end{array}$$

Мындан $0<\sin\frac{x_2+x_1}{2}<1$

болот.

$$\begin{array}{rc} - & 0<x_2<\pi \\ & \pi>x_1>0 \\ \hline & -\frac{\pi}{2}<\frac{x_2-x_1}{2}<\frac{\pi}{2} \end{array}$$

$x_2>x_1$ болгондуктан,

$0<\frac{x_2-x_1}{2}<\frac{\pi}{2}$, анда

$$0<\sin\frac{x_2-x_1}{2}<1.$$

Демек, $\cos x_2<\cos x_1$ функция $(0, \pi)$ аралыгында, жалпы алганда $(2\pi k, \pi+2\pi k)$ аралыгында кемүүчү болот ($k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$).

б) $(-\pi, 0)$ аралыгында, жалпы алганда $(-\pi+2\pi k, 2\pi k)$ аралыгында $y=\cos x$ функциясы өсүүчү болорун жогоркуга окшоштуруп, өзүңөр далилдегиле.

Демек, $2\pi k$ чекиттери максимум, $\pi+2\pi k$ — минимум чекиттери болот.

Туундуну колдонуп изилдөө.

$y'=-\sin x$, $\sin x=0$, $x=\pi k$, $(2\pi k, \pi+2\pi k)$ аралыгында $y'<0$ функция кемүүчү, $(-\pi+2\pi k, 2\pi k)$ аралыгында $y'>0$ функция өсүүчү. Мындан жогоруда көрсөтүлгөн чекиттер, функциянын экстремалдык чекиттери болору келип чыгат.

$y_{\max}=\cos 2\pi k=1$, $y_{\min}=\cos(\pi+2\pi k)=\cos\pi=-1.$

6. Функциянын иймектиги, томпоктугу жана ийилүү чекиттери. Элементардык жолду колдонуп изилдөө.

$$A=\frac{\cos x_1+\cos x_2}{2}-\cos\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=$$

$$=\cos\frac{x_1+x_2}{2}\left(\cos\frac{x_1-x_2}{2}-1\right), \quad x_1\neq x_2.$$

$$\text{а) } \begin{array}{l} \quad -\frac{\pi}{2} < x_1 < +\frac{\pi}{2} \\ + \\ \quad -\frac{\pi}{2} < x_2 < \frac{\pi}{2} \\ \hline -\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2} \end{array}$$

анда $0 < \cos\frac{x_1 + x_2}{2} < 1.$

$$\begin{array}{l} \quad -\frac{\pi}{2} < x_1 < \frac{\pi}{2} \\ - \\ \quad \frac{\pi}{2} > x_2 > -\frac{\pi}{2} \\ \hline -\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 - x_2}{2} < \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$x_1 - x_2 \neq 0,$

$\cos\frac{x_1 - x_2}{2} \neq 1,$ демек,

$0 < \cos\frac{x_1 - x_2}{2} < 1.$ Демек,

$\cos\frac{x_1 - x_2}{2} - 1 < 1.$

Анда $A < 0$, демек $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ аралыгында, жалпы алганда $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$ аралыгында функция томпок болот $(k = 0 \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$.

б) $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$ аралыгында, жалпы алганда $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{2}{3}\pi + 2\pi k\right)$ аралыгында, функция иймек экендигин жогоркуга окшоштуруп өзүңөр далилдегиле.

Бул айтылгандардан $\frac{\pi}{2} + \pi k$ чекиттери функциянын ийилүү чекиттери болору келип чыгат.

Туундуну колдонуп изилдөө.

$y'' = -\cos x$, $\cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, +\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$ аралыгында $y'' < 0$, функция томпок, $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$ аралыгында $y'' > 0$, функция иймек. Демек, $\frac{\pi}{2} + \pi k$ чекиттери функциянын ийилүү чекиттери болот.

6. Берилген функция мезгилдүү функция болгондуктан, $x \to \pm\infty$ болгондо, предели жок болот.

7. «4», «6» касиеттери негизинде функциянын маанилеринин областы $[-1, +1]$ кесиндиси болот.

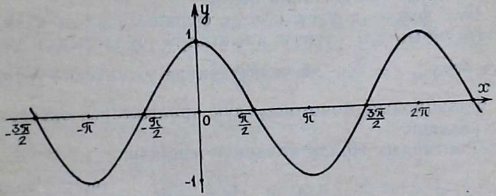
8. Функциянын эң чоң жана эң кичине маанилерин өзүңөр көрсөткүлө.

9. Бул функция жогор жактан $+1$, төмөн жактан -1 менен чектелет.

10. Бирдик айлананын чекитинин абсциссасы α бурчунун чоңдугу, б. а. аны туюнтуучу сан $\frac{\pi}{2}$ же $-\frac{\pi}{2}$ болгондо, жалпы алганда $\frac{\pi}{2}+\pi k$ болгондо ($k=0, \pm1, \pm2, \ldots$), 0 гө барабар болот (63-чиймени карагыла), б. а. $y=\cos x$ функциянын нөлү $\frac{\pi}{2}+\pi k$ чекиттери болот. Берилген функциянын аныктамасынан бирдик айлананын чекитинин абсциссасы оң жарым тегиздикте (1—4-чейректерде) оң болгондуктан, $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$ аралыгында $\cos x>0$, бирдик айлананын чекитинин абсциссасы сол жарым тегиздикте (2—3-чейректерде) терс болгондуктан, $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{3}{2}\pi+2\pi k\right)$ аралыгында $\cos x<0$ болот.

11. Берилген функциянын асимптоталары жок экендиги көрүнүп турат.

12. Функциянын графиги (66-чийме), косинусоида деп аталган ийри сызык болот.



66-чийме

$\cos x$ функциясынын графиги $\sin x$ функциясынан жеңил эле алынат, ал үчүн $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ болгондуктан, $\sin x$ функциясынын графигин OX огу боюнча, сол жакка $\frac{\pi}{2}$ аралыгына параллель которуу жетиштүү болот.

Суроолор

1. $y=\cos x$ функциясынын аныктамасын айтып бергиле.
2. Бул функциянын аныкталуу областы кандай аралык болот?
3. Функциянын үзгүлтүксүз экендигин далилдегиле.
4. Бул функциянын жуп экендигин көрсөткүлө.
5. $y=\cos x$ функциясынын монотондуулугу жана экстремалдык чекиттери жөнүндө айтып бергиле.
6. Функциянын томпоктугу, иймектиги, ийилүү чекиттери жөнүндө эмне билесиңер?
7. Бул функциянын маанилеринин областы, эң чоң жана эң кичине мааниси жана чектелгендиги жөнүндө баяндап бергиле.
8. Берилген функциянын нөлү жана белгилеринин турактуу аралыктары жөнүндө эмне билесиңер?
9. Бул функциянын графигин сызып, графиги боюнча касиеттерин айтып бергиле.
10. $y=\sin x$ функциясынын графигинен $y=\cos x$ функциясынын графигин кантип алууга болот?

4. y=tgx функциясы. 1. Функциянын аныкталуу областы $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cos x \neq 0$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$. Демек, бул функциянын аныкталуу областы $\frac{\pi}{2} + \pi k\,(k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$ түрүндөгү сандардан башка бардык чыныгы сандардын көптүгү болот.

2. $\operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$ болгондуктан, $\operatorname{tg} x$ функциясы так функция болот.

3. Бул функция үзгүлтүксүз функциялардын катышынан тургандыктан, өзүнүн аныкталуу областында үзгүлтүксүз болуп, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ чекиттеринде үзгүлтүккө учурайт.

4. Функциянын монотондуулук аралыктары, экстремалдык чекиттери.

Элементардык жолду колдонуп изилдөө.

$-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ болсун. $\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1 = \frac{\sin x_2}{\cos x_2} - \frac{\sin x_1}{\cos x_1} = \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_2 \cdot \cos x_1}$. Мында $0 < \cos x_2 \cos x_1 < 1$, $0 < x_2 - x_1 < \pi$ болгондуктан, $\sin(x_2 - x_1) > 0$. Демек, $\operatorname{tg} x_2 > \operatorname{tg} x_1$, анда $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ аралыгында, жалпы алганда $\operatorname{tg} x$ функциясынын аныкталуу областын түзгөн $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$

ар бир аралыгында, бул функция өсүүчү болот, демек, функциянын экстремалдык чекиттери жок.

Туундуну колдонуп изилдөө.

$y' = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$, $\cos x \neq 0$. Демек, бул функция анын аныкталуу областын түзгөн $\left(-\frac{\pi}{2},\ +\pi k,\ +\frac{\pi}{2} + \pi k\right)$ аралыктарынын ар биринде өсүүчү, экстремалдык чекиттери жок.

Эскертүү. tg$x$ функциясын бардык аныкталуу областында өсүүчү болот деп айтууга болбойт, себеби, антип айтсак, мисалы, $x_2 = \frac{3}{4}\pi$, $x_1 = \frac{\pi}{4}(x_2 > x_1)$ болсо, tg$x_2 = -1$, tg$x_1 = 1$ болгондуктан, tg$x_2 <$ tgx_1 функциясы кемүүчү болуп калат. Чындыгында мындай эместиги белгилүү. Ошондуктан tg$x$ функциясы, анын аныкталуу областын түзгөн ар бир аралыкта өсүүчү деп айтуу керек.

5. Функциянын томпоктугу, ийметиги жана ийилүү чекиттери. Элементардык жолду колдонуп изилдөө.

$$A = \frac{\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2}{2} - \operatorname{tg}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{\sin(x_1 + x_2)}{2\cos x_1 \cdot \cos x_2} -$$

$$- \operatorname{tg}\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2\sin\frac{x_1 + x_2}{2}\cos\frac{x_1 + x_2}{2}}{2\cos x_1 \cos x_2} -$$

$$- \frac{\sin\frac{x_1 + x_2}{2}}{\cos\frac{x_1 + x_2}{2}} = \frac{\sin\frac{x_1 + x_2}{2}\left(2\cos^2\frac{x_1 + x_2}{2} - 2\cos x_1 \cos x_2\right)}{2\cos\frac{x_1 + x_2}{2}\cos x_1 \cos x_2} =$$

$$= \frac{\sin\frac{x_1 + x_2}{2}(1 + \cos(x_1 + x_2) - 2\cos x_1 \cos x_2}{2\cos\frac{x_1 + x_2}{2}\cos x_1 \cos x_2} =$$

$$= \frac{\sin\frac{x_1 + x_2}{2}(1 - \cos(x_1 - x_2))}{2\cos\frac{x_1 + x_2}{2}\cos x_1 \cos x_2},$$ мында $x_1 \neq x_2$, $\cos(x_1 - x_2) \neq 1$.

а) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ аралыгын карайлы. $0 < x_1 < \frac{\pi}{2}$, $0 < x_2 < \frac{\pi}{2}$

$$-\frac{\pi}{2} < x_1 - x_2 < +\frac{\pi}{2};\ 0 < \cos(x_1 - x_2) < 1;$$

$1-\cos(x_1-x_2)>0$; $0<\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{\pi}{2}$ болгондуктан,

$\sin\frac{x_1+x_2}{2}>0$, $\cos\frac{x_1+x_2}{2}>0$, жана $\cos x_1>0$, $\cos x_2>0$.

Демек, $A>0$. Анда $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ аралыгында, жалпы алганда $\left(\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$ аралыгында функция иймек болот. $y=\mathrm{tg}x$ функциясы так болгондуктан, так функциянын томпоктугу жана иймектиги жөнүндө теореманын негизинде (§ 9 ду карагыла) бул функция $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k,\pi k\right)$ аралыгында томпок болот. Демек, πk чекиттери бул функциянын ийилүү чекиттери болот.

Туундуну колдонуп изилдөө.

$y=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$, $\cos x\neq0$. $y''=0$, $\sin x=0$, ийилүүгө шектүү чекит $x=\pi k$. $-\frac{\pi}{2}<x<0$, $\sin x<0$, $\cos^3 x>0$, $y''<0$ функция бул аралыкта томпок. Бул функция жалпы алганда $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \pi k\right)$ аралыгында томпок болот.

$0<x<\frac{\pi}{2}$, $\sin x>0$, $\cos^3 x>0$, $y''>0$ функция иймек, бул функция жалпы алганда $\left(\pi k,\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$ аралыгында иймек болот. Демек, πk чекиттери функциянын ийилүү чекиттери болот.

6. $y=\mathrm{tg}x$ функциясы мезгилдүү жана үзгүлтүктүү болгондуктан, $x\to\pm\infty$ да предели жок болот. Экинчи түрдөгү үзүлүү чекиттери болгон $\frac{\pi}{2}+\pi k$ түрүндөгү чекиттердин аймагындагы функциянын өзгөрүү мүнөзүн карайлы.

$$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}+\pi k\\ x>\frac{\pi}{2}+\pi k}}\mathrm{tg}\,x=\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}+\pi k\\ x>\frac{\pi}{2}+\pi k}}\frac{\sin x}{\cos x}=-\infty$$

($\sin x\to1$, $\cos x$ терс болуу менен нөлгө умтулат же $\sin x\to-1$, $\cos x$ оң болуу менен нөлгө умтулат).

$\lim\limits_{\substack{x\to \frac{\pi}{2}+\pi k \\ x<\frac{\pi}{2}+\pi k}} \operatorname{tg} x = \lim\limits_{\substack{x\to \frac{\pi}{2}+\pi k \\ x<\frac{\pi}{2}+\pi k}} \frac{\sin x}{\cos x} = +\infty$ ($\sin x \to 1$, $\cos x$ оң болуу менен нөлгө умтулат же $\sin x \to -1$, $\cos x$ терс болуу менен нөлгө умтулат).

7. 3, 4 жана 6-касиеттер негизинде функциянын маанилеринин областы $(-\infty, +\infty)$ аралыгы болот.

8. 7-касиет негизинде функциянын эң чоң жана эң кичине мааниси жок болот.

9. Функция чектелбеген (7-касиет).

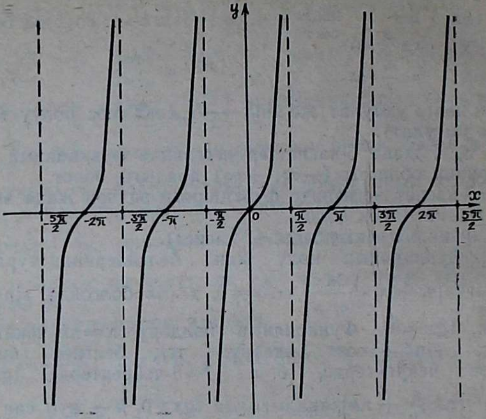
10. Функциянын нөлү жана белгилеринин турактуу аралыктары. $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cos x \neq 0$, $x=\pi k$ болгондо, $\sin x=0$, демек, $\operatorname{tg} x=0$. Функциянын нөлдөрү $x=\pi k$ чекиттери болот. $\sin x$, $\cos x$ экөөнүн тең белгиси бирдей болгон чейректерде, б. а. 1—3-чейректерде $\operatorname{tg} x>0$. Анда $\left(\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$ аралыгында $\operatorname{tg} x>0$. k — жуп сан болгондо, бул аралык 1-чейректерде, k — так сан болгондо, 3-чейректе жатат. $\sin x$, $\cos x$ экөөнүн тең белгиси ар түрдүү болгон чейректерде, б. а. 2—4-чейректерде $\operatorname{tg} x<0$. Демек, $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k, \pi k\right)$ аралыгында $\operatorname{tg} x<0$. k — жуп сан болгондо, бул аралык 4-чейректе, k — так сан болгондо, 2-чейректе жатат.

11. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ сызыгы функциянын графигинин вертикаль асимптоталары болот, башка асимптоталары болбойт (6-касиет негизинде).

12. Функциянын графиги (67-чийме) тангенсоида деп аталган ийри сызыктардан турат.

Суроолор

1. $y=\operatorname{tg} x$ функциясы деп, кандай функцияны айтабыз?
2. Бул функциянын аныкталуу областы кандай аралыктар болот?
3. Функциянын так экенин жана үзгүлтүксүз экенин далилдегиле.
4. Берилген функциянын монотондуулугу жана экстремалдык чекиттери жөнүндө эмне билесиңер?
5. Бул функциянын ийилмектиги, томпоктугу жана ийилүү чекиттери жөнүндө баяндап бергиле.
6. Функциянын үзүлүү чекиттеринин аймагындагы өзгөрүү мүнөзү кандай болот? Анын кандай асимптоталары бар?



67-чийме

7. Функциянын маанилеринин областы кандай аралыктар болот?

8. Функциянын нөлдөрү жана белгилеринин турактуу аралыктары жөнүндө айтып бергиле.

9. Функциянын графигин анын изилденген касиеттеринин негизинде түзүп, кайра графиги боюнча касиеттерин айтып бергиле.

5. $y = \mathrm{ctg}x$ функциясы. 1. Функциянын аныкталуу областы. $\mathrm{ctg}\,x = \frac{\cos x}{\sin x}$ болгондуктан, $\sin x \neq 0$, $x \neq 2\pi k$. Демек, бул функциянын аныкталуу областы $\pi k\,(R=0,\ \pm 1,\ \pm 2\ ...)$ түрүндөгү сандардан башка бардык чыныгы сандардын көптүгү болот.

2. $\mathrm{ctg}\,(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\mathrm{ctg}\,x$. Ошентип, бул так функция болот.

3. $y = \mathrm{ctg}x$ функциясы үзгүлтүксүз функциялардын катышы болгондуктан, өзүнүн аныкталуу областында үзгүлтүксүз функция болот. $x = \pi k$ чекиттеринде функция үзгүлтүккө учурайт.

4. Функциянын монотондуулук аралыктары, экстремалдык чекиттери.

Элементардык жолду колдонуп изилдөө.

$0<x_1<x_2<\pi$ болсун. $\operatorname{ctg} x_2-\operatorname{ctg} x_1=\dfrac{\cos x_2}{\sin x_2}-\dfrac{\cos x_1}{\sin x_1}=$ $=\dfrac{\sin(x_1-x_2)}{\sin x_2\sin x_1}=\dfrac{-\sin(x_2-x_1)}{\sin x_2\sin x_1}$, $\sin x_2>0$, $\sin x_1>0$, $0<x_2-x_1<\pi$ болгондуктан, $\sin(x_2-x_1)>0$. Демек, $\operatorname{ctg} x_2-\operatorname{ctg} x_1<0$, $\operatorname{ctg} x_2<\operatorname{ctg} x_1$ болгондуктан, бул функция $(0, \pi)$ аралыгында, жалпы алганда анын аныкталуу областын түзгөн ар бир $(\pi k, \pi+\pi k)$ аралыгында кемүүчү болот, экстремалдык чекиттери жок.

Туундуну колдонуп изилдөө.

$(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}<0$, $\sin x\neq 0$. Демек, бул функциянын аныкталуу областын түзгөн ар бир $(\pi k, \pi+\pi k)$ аралыгында кемүүчү, экстремалдык чекиттери жок.

Эскертүү. Бул функцияны да, так эместик келип чыкпасын үчүн, $y=\operatorname{tg} x$ функциясы сыяктуу эле бардык аныкталуу областында кемүүчү деп айтпоо керек.

5. Функциянын томпоктугу, иймектиги жана ийилүү чекиттери.

Элементардык жолду колдонуп изилдөө.

$$A=\frac{\operatorname{ctg} x_1+\operatorname{ctg} x_2}{2}-\operatorname{ctg}\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\sin(x_1+x_2)}{2\sin x_1\sin x_2}-$$

$$-\operatorname{ctg}\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2\sin\dfrac{x_1+x_2}{2}\cos\dfrac{x_1+x_2}{2}}{2\sin x_1\sin x_2}-$$

$$-\frac{\cos\dfrac{x_1+x_2}{2}}{\sin\dfrac{x_1+x_2}{2}}=\frac{\cos\dfrac{x_1+x_2}{2}}{2\sin x_1\sin x_2\sin\dfrac{x_1+x_2}{2}}\left(2\sin^2\frac{x_1+x_2}{2}-\right.$$

$$\left.-2\sin x_1\sin x_2\right)=\frac{\cos\dfrac{x_1+x_2}{2}}{2\sin x_1\sin x_2\sin\dfrac{x_1+x_2}{2}}(1-\cos(x_1+x_2)-$$

$$-2\sin x_1\sin x_2)=\frac{\cos\dfrac{x_1+x_2}{2}\;(1-\cos(x_1-x_2))}{2\sin\dfrac{x_1+x_2}{2}\sin x_1\sin x_2},$$

мында $x_1\neq x_2$, $\cos(x_1-x_2)\neq 1$.

а) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ аралыгын карайлы. $0<x_1<\frac{\pi}{2}$; $0<x_2<\frac{\pi}{2}$ $-\frac{\pi}{2}<x_1-x_2<+\frac{\pi}{2}$; $0<\cos(x_1-x_2)<1$, $1-\cos(x_1-x_2)>0$, $\sin\frac{x_1+x_2}{2}>0$, $\cos\frac{x_1+x_2}{2}>0$, $0<\frac{x_1+x_2}{2}<+\frac{\pi}{2}$ болгондуктан жана $\sin x_1>0$, $\sin x_2>0$. Анда $A>0$, демек, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ аралыгында, жалпы алганда $\left(\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$ аралыгында функция иймек.

б) $y=\mathrm{ctg}\,x$ функциясы так болгондуктан, так функциянын томпоктугу жана иймектиги жөнүндөгү теореманын негизинде (§ 9-карагыла), бул функция $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k, \pi k\right)$ аралыгында томпок болот, $\frac{\pi}{2}+\pi k$ чекиттери ийилүү чекиттери болот.

Туундуну колдонуп изилдөө.

$(\mathrm{ctg}\,x)'' = \frac{2\cos x}{\sin^3 x}$, $\sin x \neq 0$, $\cos=0$ болгондо, $y''=0$.

Демек,ийилүүгө шектүү чекиттер $\frac{\pi}{2}+\pi k$ болот.

$-\frac{\pi}{2}<x<0$, $\cos x>0$, $\sin^3 x<0$, $y''<0$ функция бул аралыкта, жалпысынан алганда $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k, \pi k\right)$ аралыгында томпок. $0<x<\frac{\pi}{2}$, $\cos x>0$, $\sin^3 x>0$, $y''>0$ функция бул аралыкта, жалпы алганда $\left(\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$ аралыгында иймек, ийилүү чекиттери $\frac{\pi}{2}+\pi k$ болот.

6. $\mathrm{ctg}\,x=y$ функциясы мезгилдүү жана үзгүлтүктүү болгондуктан $x\to\pm\infty$ да предели жок болот.

Экинчи түрдөгү үзүлүү чекиттери πk нын аймагындагы функциянын өзгөрүү мүнөзүн карайлы.

$\lim\limits_{\substack{x\to\pi k\\ x>\pi k}} \mathrm{ctg}\,x = \lim\limits_{\substack{x\to\pi k\\ x>\pi k}} \frac{\cos x}{\sin x} = +\infty$ ($\cos x\to 1$, $\sin x$ оң болуу менен нөлгө умтулат же cosx→—1, sin$x$ терс болуу менен нөлгө умтулат).

$$\lim_{\substack{x\to\pi k\\ x<\pi k}} \operatorname{ctg} x = \lim_{\substack{x\to\pi x\\ x<\pi k}} \frac{\cos x}{\sin x} = -\infty$$ (cos$x$→—1, sin$x$ оң болуу менен нөлгө умтулат же cosx→—1, sinx терс болуу менен нөлгө умтулат).

7. 3, 4 жана 6-касиеттер негизинде функциянын маанилеринин областы (—∞, +∞) аралыгы болот.

8. Функциянын эң чоң жана эң кичине мааниси жок болот (7-касиет).

9. Ошол эле 7-касиеттин негизинде функция чектелбеген болот.

10. Функциянын нөлү жана белгилеринин турактуу аралыктары.

$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$; $\sin x \neq 0$, $\cos x = 0$ болгондо ctg$x$=0 болот, демек, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ чекиттери функциянын нөлдөрү болот. $\left(\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$ аралыгында ctg$x$>0, $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \pi k\right)$ аралыгында ctg$x$<0 болот. Муну tg$x$ функциясына окшоштуруп өзүңөр далилдегиле.

11. 6-касиеттин негизинде $x = \pi k$ сызыктары функциянын графигинин вертикаль асимптоталары болот. Башка асимптоталары жок.

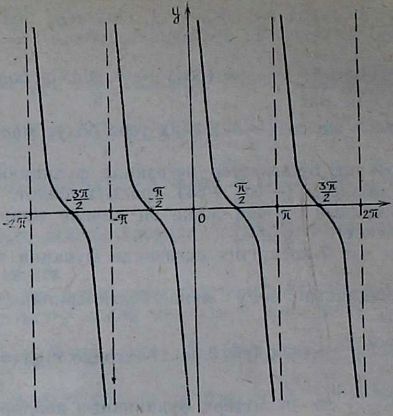
12. Функциянын графиги (68-чийме) котангенсоида деп аталган ийри сызык болот.

ctg$x$ функциясынын графигин tgx функциясынын графигинен жеңил эле алууга болот, ал үчүн

$\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ болгондуктан, тангенсоиданы эки жолу өзгөртүү, атап айтканда, OX огу боюнча аны сол жакка $\frac{\pi}{2}$ аралыкка параллель которуп жана ошол эле OX огу боюнча чагылдыруу жетиштүү.

Суроолор

1. y=ctg$x$ функциясы деп, кандай функцияны айтабыз?
2. Бул функциянын аныкталуу областы кандай сандардын көптүгү болот?
3. Функциянын тактыгын жана үзгүлтүксүздүгүн көрсөткүлө.



68-чийме

4. Функциянын монотондуулук аралыктарын жана экстремалдык чекиттери жөнүндө айтып бергиле.

5. $y=\text{ctg}x$ функциясынын ийметиги, томпоктугу жана ийилүү чекиттери жөнүндө эмне билесиңер?

6. Функциянын чексиздиги, үзүлүү чекитинин аймагындагы өзгөрүү мүнөзү кандай болот?

7. Бул функциянын маанилеринин областы, эң чоң жана эң кичине маанисин жана чектелген, чектелбегени жөнүндө айтып бергиле.

8. Функциянын нөлү, белгилеринин турактуу аралыктары кандай болот?

9. Бул функциянын графигин сызып, ал графикти окугула (графиги боюнча касиеттерин айтып бергиле).

Көнүгүүлөр

156. Графиктерди жөнөкөй өзгөртүп түзүүлөрдү колдонуп, төмөнкү функциялардын графиктерин түзгүлө жана графиги боюнча ар бир функциянын касиеттерин (мезгилдүүлүгүн кошо) айтып бергиле:

1) $y=\sin 3x$; 2) $y=\cos 2x-1$; 3) $y=\text{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

4) $y=\text{ctg}\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$; 5) $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{4}$;

6) $y=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{3}$.

Төмөнкү функцияларды алдын ала жалпы изилдөө менен графигин түзгүлө:

157. $y = 4\left(\cos^4 \frac{x}{2} + \sin^4 \frac{x}{2}\right)$.

158. $y = \frac{\cos 2x}{\sin x}$.

159. $y = \frac{\sin^2 x}{2 + \sin x}$.

160. $y = \sin x + \frac{3}{4 \sin x}$.

§ 22. ТЕСКЕРИ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ФУНКЦИЯЛАР

1. y=arcsinx функциясы. Аныкталуу областы $\left[-\frac{\pi}{2}, \quad +\frac{\pi}{2}\right]$ болгондо, маанилеринин областы $[-1, +1]$ болгон $x=\sin y$ функциясы бул аныкталуу областында өсүүчү жана үзгүлтүксүз функция болорун көрдүк.

Ошондуктан тескери функциянын бар болушу жөнүндөгү теореманын негизинде аныкталуу областы $[-1, +1]$ болгондой, бул аныкталуу областында өсүүчү жана үзгүлтүксүз, маанилеринин областы $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ болгон $x=\sin y$ функциясына тескери болгон функция сөзсүз бар болот. Ал функцияны арксинус функциясы деп айтабыз жана $y=\arcsin x$ деп белгилейбиз. Бул аныктамадан $\sin(\arcsin x)=x$ болору түздөн түз келип чыгат.

1. Бул функциянын аныкталуу областы $[-1, +1]$ кесиндиси болот (ал жогор жакта негизделди).

2. Функция так функция болот.

$\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ болгондуктан, $-\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ болот.

$\arcsin(-x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ болорун көрүү кыйын эмес. Себеби: $-x \in [-1,+1]$. Демек, $\sin[\arcsin(-x)]=-x$. $\sin(-\arcsin x)=-\sin(\arcsin x)=-x$, анда $\arcsin(-x)=-\arcsin x$. Мисалы,

$$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}, \quad \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}.$$

3. $y=\arcsin x$ функциясы үзгүлтүксүз (жогор жакта негизделди).

4. Функциянын монотондуулук аралыктары жана экстремалдык чекиттери. Бул функция аныкталуу областында монотондуу өсүүчү болорун биз жогор жакта тескери функциянын бар болушу жөнүндөгү теореманын негизинде далилдедик.

Бул жерде аны далилдөөнүн бизге көндүм болуп калган дагы эки жолун көрсөтө кетмекчибиз.

Элементардык жолду колдонуу.

x_1 жана x_2 $[-1, +1]$ кесиндисинен алынган аргумент x тин каалаган эки маанилери болуп жана $x_1<x_2$ болсун. $y_2=\arcsin x_2$, $y_1=\arcsin x_1$ деп белгилейли. y_1, $y_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin y_2=x_2$, $\sin y_1=x_2$ болот. $x_1<x_2$ болгондуктан, $\sin y_1< <\sin y_2$ болот. Синус функциясы $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ кесиндисинде өсүүчү болгондуктан, $y_2>y_1$ болот.

Туундуну колдонуу.

$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(-1, +1)$ аралыгында $y'>0$, демек, функция өсүүчү болот.

Жогоруда айтылгандардан функциянын экстремалдык чекиттери жок экени көрүнүп турат.

5. Функциянын томпоктугу, ийменкиги жана ийилүү чекиттери. Тескери тригонометриялык функцияларды бул касиетке изилдөөдө туундуну колдонуу менен чектелебиз.

$y''=\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, $(-1, +1)$ аралыгында y'' бар болот жана $\sqrt{(1-x^2)^3}>0$, $y''=0$, $x=0$. Анда $0<x<1$ болсо, $y''>0$, функция бул аралыкта иймек, $-1<x<0$ болсо, $y''<0$, функция бул аралыкта томпок болот. $x=0$ чекити ийилүү чекит болот.

6. $\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$, $\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$.

7. Функциянын маанилеринин областы $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ диси болот (жогор жакта негизделди).

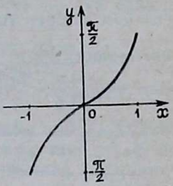
8. Функциянын эң чоң мааниси $+\frac{\pi}{2}$, эң кичине мааниси $-\frac{\pi}{2}$ болот.

9. Функция $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ кесиндиси менен чектелген.

10. Функциянын нөлү, белгилеринин турактуу аралыктары. $\arcsin x=0$ болсун үчүн $x=0$ болуу керек, себеби: $\sin 0=0$ болот. Ошентип, $x=0$ функциянын нөлү болот. $0<x\leqslant 1$ аралыгында $0<y\leqslant\frac{\pi}{2}$ болот, себеби: $x=\sin y$ функциясында $0<y\leqslant\frac{\pi}{2}$ болгондо, $0<x\leqslant 1$ болот. $-1\leqslant x<0$ арасында $-\frac{\pi}{2}\leqslant y<0$ болот, себеби: $x=\sin y$ функциясында $-\frac{\pi}{2}\leqslant y<0$ болгондо, $-1\leqslant x<0$ болот.

11. Функциянын графигинин асимптоталары жок экенин көрүү кыйын эмес.

12. Функциянын графиги (69-чийме).



69-чийме

$x=\sin y$ функциясы ал монотондуу өсүүчү же кемүүчү болгон каалаган кесиндиде тескери функцияга ээ болот. Мисалы, $x=\sin y$ функциясы $\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{3\pi}{2}$ аралыгында $+1$ ден -1 ге чейин монотондуу кемий турганын биз билебиз. Мында $y=\pi-\arcsin x$ болот. Чындыгында да, $\sin x=\sin(\pi-x)$.

Эгер $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant+\frac{\pi}{2}$ болсо, $\frac{\pi}{2}\geqslant -x\geqslant-\frac{\pi}{2}$ болот. Анда $\frac{\pi}{2}\leqslant\pi-x\leqslant\frac{3\pi}{2}$ болот. Демек, $y=\pi-\arcsin x$ функциясы $\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right]$ кесиндисинде аныкталган $x=\sin y$ функциясына карата тескери функция болот. Бул маселени жалпы түрдө карайлы. $x=\sin y$ функциясы $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ +\frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$ $(k=0,\ +1,\ +2,\ \dots)$ ар бир кесиндиде монотондуу өсүүчү болору белгилүү. Анда тиешелүү түрдө $y^{(1)}=\arcsin x+2\pi k$ деп жаза алабыз.

$x=\sin y$ функциясы $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$ ар бир кесиндисинде монотондуу кемүүчү болот, анда тиешелүү түрдө $y^{(2)}=\pi-\arcsin x+2\pi k=-\arcsin x+\pi(1+2k)$ деп жаза алабыз. $y^{(1)}$ жана $y^{(2)}$ лерди бириктирип, $y=(-1)^n\arcsin x+\pi n$ $(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots)$ деп жазууга боловрун көрүү кыйын эмес. Эгер n — жуп сан болсо, бул формула $y^{(1)}$ ди берет, так сан болсо $y^{(2)}$ ни берет.

Биз бул жерде көп маанилүү деп аталган функцияга, б. а. аргументтин мүмкүн болуучу ар бир маанисине функциянын бирден көп мааниси туура келген функцияга ээ болдук. Ошентип, $x=\sin y$ функциясында $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant+\frac{\pi}{2}$ деп чектебей, аныкталуу областын жалпы эле $-\infty<y<+\infty$ деп алсак, ага тескери функция көп маанилүү функция болот, аны $y=\mathrm{Arcsin}x$ деп белгилейбиз. Анда $\mathrm{Arcsin}x=$ $=(-1)^n\arcsin x+\pi n$ болот. Мисалы,

$$\mathrm{Arc}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}=(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi n=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n.$$

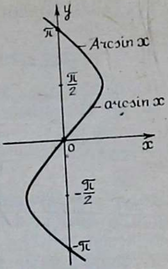
$y=\arcsin x$ бир маанилүү функциясы $\mathrm{Arcsin}x$ көп маанилүү функциясынын башкы тармагы (же башкы мааниси) деп аталат. Анын мааниси үчүн $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant+\frac{\pi}{2}$ кесиндиси кабыл алынганын биз жогору жакта көрдүк. Ал үчүн $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$, ... $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k, +\frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$ каалаган бир кесиндиси кабыл алынаар эле. Бирок $\arcsin x$, б. а. $\mathrm{Arcsin}x$ тин башкы тармагы (мааниси) үчүн бул кесиндилердин ичинен модулу боюнча эң кичине сандар менен чектелгенин, б. а. графиги координаталар башталышына жакын жайланышканын кабыл алууга шарттешышкан.

$y=\mathrm{Arcsin}x$ функциясынын графиги 70-чиймеде көрсөтүлгөн.

Суроолор

1. $y=\arcsin x$ функциясы деп, кандай функцияны айтабыз, анын бар болуусун кантип далилдөөгө болот?
2. Бул функциянын аныкталуу жана маанилеринин областын, үзгүлтүксүздүгүн көрсөткүлө?
3. Функциянын так функция болорун далилдегиле.
4. Функциянын монотондуулугу жөнүндө эмне айтууга болот?
5. Бул функциянын иймектиги, томпоктугу жана ийилүү чекиттери жөнүндө эмне билесиңер?
6. Функциянын нөлүн, белгилеринин турактуу аралыктарын көрсөткүлө.
7. Берилген функциянын графигин чийип бергиле.
8. $y=\mathrm{Arcsin}x$ көп маанилүү функциясынын кандайча алынганын, айтып, формуласын жазып бергиле.
9. $y=\mathrm{Arcsin}x$ функциясынын башкы тармагы (мааниси) жөнүндө эмне билесиңер?
10. Бул функциянын графигин чийип, графиктен анын башкы тармагын көрсөткүлө.

2. $y=\arccos x$ функциясы. Аныкталуу области $[0, \pi]$ кесиндиси деп алганда, маанилеринин области $[-1, +1]$ кесиндиси болгон $x=\cos y$ функциясы бул аныкталуу областында кемүүчү жана үзгүлтүксүз функция болору белгилүү. Ошондуктан, тескери функциянын бар болушу жөнүндөгү теореманын негизинде аныкталуу области $[-1, +1]$ кесиндиси болгон, бул аныкталуу областында кемүүчү жана үзгүлтүксүз болгон, маанилеринин области $[0, \pi]$ кесиндиси болгон, функциясына тескери функция сөзсүз бар болот, ал функцияны *арккосинус функциясы* деп атайбыз жана $y=\arccos x$ деп белгилейбиз. $\cos(\arccos x)=x$ болору бул аныктамадан түздөн түз келип чыгат.



70-чийме

1. $y=\arccos x$ функциясынын аныкталуу области $[-1, +1]$ кесиндиси болору жогор жакта көрсөтүлдү.

2. Бул функция так да, жуп да болбостон, $\arccos(-x)=$ $=\pi-\arccos x$ болот.

Далилдөө: $\pi-\arccos x \in [0, \pi]$ себеби: $\arccos x \in [0, \pi]$, $\arccos(-x) \in [0, \pi]$ болот, анткени: $-x \in [-1, +1]$ жана $\cos[\arccos(-x)]=-x$, $\cos[\pi-\arccos x]=-\cos\arccos x=$ $=-x$.

Демек, $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$. Мисалы,

$$\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3},\ \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=$$

$$=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}.$$

3. Функция үзгүлтүксүз (жогор жакта негизделди).

4. Бул функциянын аныкталуу областында кемүүчү болору жогор жактан көрсөтүлдү. Анын кемүүчү экенин далилдөөнүн дагы эки жолун көрсөтө кетмекчибиз.

Элементардык жолду колдонуу.

x_1 жана x_2 лер $[-1, +1]$ кесиндисинен алынган аргумент x тин каалаган эки маанилери жана $x_1<x_2$ болсун. $y_1=\arccos x_1$, $y_2=\arccos x_2$ деп белгилейли. $y_1, y_2, \in [0, \pi]$ жана $\cos y_1=x_1$, $\cos y_2=x_2$, $x_1<x_2$ болгондуктан, $\cos y_1>$ $>\cos y_2\cdot x=\cos y$ функциясы көрсөтүлгөн $[0, \pi]$ аралыгында кемүүчү болгондуктан, $y_2<y_1$ болот. Демек, $y=\arccos x$ функциясы $[-1, +1]$ аралыгында кемүүчү болот, экстремалдык чекиттери жок.

Туундуну колдонуу.

$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(-1, +1)$ аралыгында $y'<0$, демек, функция кемүүчү, экстремалдык чекиттери жок.

5. Функциянын томпоктугу, иймектиги жана ийилүү чекиттери. $y''=-\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$; $y''=0$, $x=0$, $0<x<1$ болгондо, $y''<0$, функция томпок. $-1<x<0$ болгондо, $y''>0$, функция иймек. $x=0$ чекити ийилүү чекити болот.

6. $\arccos(-1)=\pi$; $\arccos 1=0$.

7. Функциянын маанилеринин областы $[0, \pi]$ кесиндиси болору жогор жакта көрсөтүлдү.

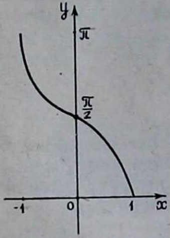
8. Функциянын эң кичине мааниси 0, эң чоң мааниси π болот (7-касиеттин негизинде).

9. Функция $[0, \pi]$ кесиндиси менен чектелген.

10. Функциянын нөлү, белгилеринин турактуу аралыктары, $\arccos x=0$ болсун үчүн $x=1$ болуу керек, себеби: $\cos 0=1$ болот. Демек, $x=1$ функциянын нөлү болот. $[-1, +1)$ аралыгында дайыма $y>0$, себеби: $0<y\leqslant\pi$ болгондо, $x=\cos y$ функциясында $-1\leqslant x<1$ болот.

11. Бул функциянын графигинин асимптотасынын жок экени көрүнүп турат.

12. Функциянын графиги (71-чийме).

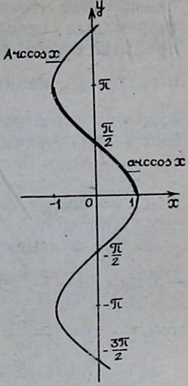


71-чийме

$x=\cos y$ функциясы, ал монотондуу болгон ар бир кесиндиде тескери функцияга ээ болот. $x=\cos y$ функциясы, -1 ден $+1$ ге чейин өсүүчү болгон $[-\pi, 0]$ кесиндисинде аныкталса тиешелүү тескери функция $y=-\arccos x$ болот, бул $\cos y=\cos(-y)$ болушунан келип чыгат. Бул маселени жалпы түрдө карап көрөлү. $x=\cos y$ функциясы $[2\pi k, 2\pi k+\pi]$ $(k=0, \pm1, \pm2, ...)$ ар бир кесиндисинде кемүүчү болот, анда тиешелүү түрдө $y^{(1)}=\arccos x+2\pi k$ деп жазууга болот. $x=\cos y$ $[-\pi+2\pi k, 2\pi k]$ ар бир кесиндиде өсүүчү болот, анда тиешелүү түрдө $y^{(2)}=-\arccos x+2\pi k$ деп жазууга болот. $y^{(1)}$ жана $y^{(2)}$ лерди бириктирип, $y=\pm\arccos x+2\pi k$ деп жазууга болорун көрүү кыйын эмес.

Биз бул жерде көп маанилүү функция деп аталган функцияга кез келип отурабыз. Ошентип, $x=\cos y$ функциясынын аныкталуу областы $[0, \pi]$ кесиндиси менен чектебей, жалпы эле $(-\infty, +\infty)$ аралыгында карасак, ага тескери функция көп маанилүү функция болот, аны $y=\mathrm{Arccos}x$ деп белгилейбиз. Анда $\mathrm{Arccos}x=\pm\arccos x+2\pi k$.

Мисалы, $\mathrm{Arccos}\frac{\sqrt{3}}{2}=\pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+2\pi k=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k;$



72-чийме

$y=\arccos x$ бир маанилүү функциясы, Arccos$x$ көп маанилүү функциясынын башкы тармагы (башкы мааниси) деп аталат. $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$ деп, ал үчүн $[0, \pi]$ кесиндиси кабыл алынганын биз жогор жакта көрдүк. Анын мааниси үчүн $[\pi, 2\pi]$, $[2\pi, 3\pi]$, ... $[-\pi k, \pi+\pi k]$ ... $(k=0, \pm1, \pm2, ...)$ кесиндилердин каалаган бирин алууга болот эле. Бирок arccos$x$, б. а. Arccos$x$ тин башкы тармагы (мааниси) үчүн бул кесиндилердин ичинен эң кичине терс эмес сандар менен чектелгени, графиги координаталар башталышына жакын жайланышканын кабыл алууга шартташышкан. $y=\mathrm{Arccos}x$ функциясынын графиги 72-чиймеде берилген.

Суроолор

1. $y=\arccos x$ функциясынын аныктамасын айтып, бул функциянын бар болорун далилдегиле.
2. Бул функциянын аныкталуу жана маанилеринин областтары кандай аралыктар болушат?
3. Функциянын монотондуулугу, экстремалдык чекиттери жөнүндө айтып бергиле.
4. Бул функциянын иймектиги, томпоктугу жана ийилүү чекиттери жөнүндө эмне билесиңер?
5. Функциянын нөлү, белгилеринин туруктуу аралыктары жөнүндө айтып бергиле.
6. Функциянын графигин чийип, ал боюнча касиеттерин айткыла.
7. $y=\mathrm{Arccos}x$ функциясы деген эмне жана анын формуласы кандай чыгарылат?
8. $y=\mathrm{Arccos}x$ функциясынын графигин чийгиле.

3. $y=\mathrm{arctg}x$ функциясы. Аныкталуу областы $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ аралыгы деп караганда, маанилеринин областы $(-\infty, +\infty)$ аралыгы болгон $x=\mathrm{tg}y$ функциясы бул аныкталуу областында өсүүчү жана үзгүлтүксүз болорун билебиз.

Ошондуктан тескери функциянын бар болуусу жөнүндөгү теореманын негизинде аныкталуу областы $(-\infty, +\infty)$ аралыгы болуп, бул аныкталуу областында өсүүчү жана үзгүлтүксүз, маанилеринин областы $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ аралыгы болгон, $x=\operatorname{tg} y$ функциясына тескери функция сөзсүз бар болот. Ал функцияны арктангенс деп айтабыз жана $y=\operatorname{arctg} x$ деп белгилейбиз. Бул аныктамадан $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=$ $=x$ болору түздөн түз келип чыгат.

1. $y=\operatorname{arctg} x$ функциясынын аныкталуу областы $(-\infty, +\infty)$ аралыгы болору жогор жакта негизделди.

2. Бул функция так функция болот.

$-\operatorname{arctg} x \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, себеби: $\operatorname{arctg} x \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$.

$\operatorname{arctg}(-x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, себеби: $-x \in(-\infty, +\infty)$

$\operatorname{tg}(-\operatorname{arctg} x)=-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=-x$ жана $\operatorname{tg}[\operatorname{arctg}(-x)]=$ $=-x$

Анда $\operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg} x$ болот.

Мисалы, $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$; $\operatorname{arctg}(-1)=-\operatorname{arctg} 1=-\frac{\pi}{4}$.

3. Бул функция үзгүлтүксүз болору жогор жакта негизделди.

4. Функциянын монотондуулугу, экстремалдык маанилери.

$y=\operatorname{arctg} x$ функциясынын аныкталуу областында өсүүчү болору тескери функциянын бар болуусу жөнүндөгү теореманын негизинде жогор жакта көрсөтүлдү, биз аны негиздөөнүн дагы эки жолун карайбыз.

Элементардык жолду колдонуу. x_1 жана x_2 лер $x_1<x_2$ болгон $(-\infty, +\infty)$ аралыгынан алынган аргументтин каалаган эки маанилери болсун, y_1 жана y_2 $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ аралыгына тиешелүү жана $\operatorname{tg} y_2=x_2$, $\operatorname{tg} y_1=x_1$, $x_1<x_2$ болгондуктан, $\operatorname{tg} y_1<\operatorname{tg} y_2$ болот жана $y_1, y_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ болгондуктан, $y_1<y_2$ болот. Ошентип, $y=\operatorname{arctg} x$ функциясы $(-\infty, +\infty)$ аралыгында өсүүчү болот, экстремалдык чекиттери жок.

Туундуну колдонуу. $y'=\frac{1}{1+x^2}>0$, демек, берилген функция дайыма өсүүчү, экстремалдык чекиттери жок болот.

5. Функциянын томпоктугу, иймектиги жана ийилүү чекиттери. $y''=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$; $y''=0$, $x=0$, $0<x<+\infty$ болсо, $y''<0$, демек, функция томпок; $-\infty<x<0$ болсо, $y''>0$, демек, функция иймек, $x=0$ функциянын ийилүү чекити болот.

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x=\dfrac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x=-\dfrac{\pi}{2}$; себеби

$$\lim_{\substack{y\to\frac{\pi}{2}\\ y<\frac{\pi}{2}}} \operatorname{arctg} y=+\infty; \quad \lim_{\substack{y\to-\frac{\pi}{2}\\ y>-\frac{\pi}{2}}} \operatorname{arctg} y=-\infty.$$

7. Функциянын маанилеринин областы $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ +\dfrac{\pi}{2}\right)$ аралыгы болот (жогор жакта негизделди).

8. Функциянын эң чоң жана эң кичине мааниси жок (7-касиеттин негизинде).

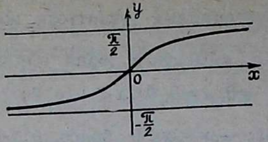
9. Функция $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ +\dfrac{\pi}{2}\right)$ аралыгы менен чектелген (7-касиеттин негизинде).

10. Функциянын нөлү жана белгилеринин туруктуу аралыктары $x=0$ болгондо, $\operatorname{arctg} x=0$ болот, $x=0$ функциянын нөлү болот. $(0, +\infty)$ аралыгында $y>0$ (себеби: $x=\operatorname{tg} y$ функциясында $0<y<\dfrac{\pi}{2}$ болгондо, $0<x<+\infty$ болот). $(-\infty, 0)$ аралыгында $y\leqslant 0$ (себеби: $x=\operatorname{tg} y$ функциясы $-\dfrac{\pi}{2}<y<0$ болгондо, $-\infty<x<0$ болот).

11. $y=-\dfrac{\pi}{2}$, $y=+\dfrac{\pi}{2}$ сызыктары функциянын графигинин горизонталь асимптоталары болушат (6-касиет), башка асимптоталары жок.

12. Функциянын графиги (73-чийме).

$\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ аралыгын ар кандай бүтүн мезгилге жылдыруудан алынган ар бир $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$ ($k=0, \pm1, \ldots$) аралыгында $x=\operatorname{tg} y$ функциясы өсөт, демек, тескери функ-



73-чийме

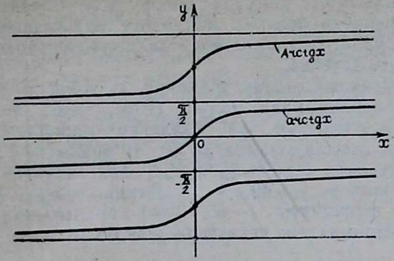
цияга өтүүгө болот. Анда $y=\mathrm{arctg}x+\pi k$ деп жазууга болот. Биз бул жерде да көп маанилүү функцияга ээ болобуз. Ошентип, $x=\mathrm{tg}y$ функциясында $-\frac{\pi}{2}<y<+\frac{\pi}{2}$ деп чектебей, аныкталуу областын жалпы эле $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$ аралыгы деп алсак, тескери функция көп маанилүү функция болот. Ал функцияны $y=\mathrm{Arctg}x$ деп белгилейбиз, анда $\mathrm{Arctg}x=\mathrm{arctg}x+\pi k$ болот. Мисалы, $\mathrm{Arctg}\sqrt{3}=\mathrm{arctg}\sqrt{3}+\pi k=\frac{\pi}{3}+\pi k$.

$y=\mathrm{arctg}x$ бир маанилүү функциясы $\mathrm{Arctg}x$ көп маанилүү функциясынын башкы тармагы (башкы мааниси) деп аталат. Анын мааниси үчүн $-\frac{\pi}{2}<\mathrm{arctg}\,x<\frac{\pi}{2}$ аралыгы кабыл алынганын көрдүк. Ал үчүн $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2}\right)$, ... , $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, ... $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ каалаган аралыктарынын бирин кабыл алууга болот эле. Бирок $\mathrm{arctg}x$ үчүн, б. а. $\mathrm{Arctg}x$ тин башкы мааниси бул аралыктардын ичинен модулу боюнча эң кичине сандар менен чектелгенин, графиги координаталар башталышына эң жакын жайлашканын кабыл алууга шартташылган.

$y=\mathrm{Arctg}x$ функциясынын графиги 74-чиймеде көрсөтүлгөн.

Суроолор

1. $y=\mathrm{arctg}x$ функциясынын аныктамасын айткыла жана анын бар болорун көрсөткүлө.
2. Бул функциянын аныкталуу жана маанилеринин областы кандай аралыктар болот?
3. Берилген функциянын монотондуулугу жана экстремалдык маанилери жөнүндө эмне билесиңер?
4. Бул функциянын томпоктугу, ийилмектиги жана ийилүү чекиттери жөнүндө айтып бергиле.
5. $y=\mathrm{arctg}x$ функциясынын нөлү, белгилеринин турактуу аралыктары кандай болот?
6. Бул функциянын асимптоталары кандай сызыктар болот? Анын графигин түзгүлө.



74-чийме

7. $y=\mathrm{Arctg}x$ функциясы кантип алынат, ал эмнеге барабар? Анын графигин түзгүлө.

4. **$y=\mathrm{arcctg}x$ функциясы.** Аныкталуу областы $(0, \pi)$ аралыгы болсун деп алганда, маанилеринин областы $(-\infty, +\infty)$ аралыгы болгон $x=\mathrm{ctg}y$ функциясы бул аныкталуу областында кемүүчү жана үзгүлтүксүз болору белгилүү. Ошондуктан тескери функциянын бар болуусу жөнүндөгү теореманын негизинде аныкталуу областы $(-\infty, +\infty)$ аралыгы болгон, бул аныкталуу областында кемүүчү жана үзгүлтүксүз болгон, маанилеринин областы $(0, \pi)$ аралыгы болгон, $x=\mathrm{ctg}y$ функциясына тескери функция сөзсүз бар болот. Ал функцияны *арккотангенс функциясы* деп айтабыз жана $y=\mathrm{arcctg}x$ деп белгилейбиз. Бул аныктамадан $\mathrm{ctg}\,(\mathrm{arcctg}x)=x$ болору түздөн түз келип чыгат.

1. $y=\mathrm{arcctg}x$ функциясынын аныкталуу областы $(-\infty, +\infty)$ аралыгы болот (жогор жакта көрсөтүлдү).

2. Бул функция жуп да жана так да боло албайт. $\mathrm{arcctg}(-x)=\pi-\mathrm{arcctg}x$ болот. $\pi-\mathrm{arcctg}x\in(0, \pi)$ болот, себеби: $\mathrm{arcctg}x\in(0, \pi)$. $\mathrm{arcctg}(-x)\in(0,\pi)$ себеби: $-x\in(-\infty, +\infty)$ жана $\mathrm{ctg}(\pi-\mathrm{arctg}x)=-\mathrm{ctg}\,(\mathrm{arcctg}x)=-x$, $\mathrm{ctg}[\mathrm{arcctg}(-x)]=-x$ болгондуктан, $\mathrm{arcctg}(-x)=\pi-\mathrm{arcctg}x$ болот. Мисалы, $\mathrm{arcctg}\,1=\frac{\pi}{4}$; $\mathrm{arcctg}\,(-\sqrt{3})=$ $=\pi-\mathrm{arcctg}\sqrt{3}=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$.

3. Функция үзгүлтүксүз болот (жогор жакта негизделди).

4. Функциянын монотондуулугу жана экстремалдык чекиттери.

$y=\mathrm{arcctg}x$ функциясы аныкталуу областы болгон $(-\infty,$

$+\infty)$ аралыгында кемүүчү болору жогор жакта тескери функциянын бар болуусу жөнүндөгү теореманын негизинде далилденди. Бул ырастоону далилдөөнүн дагы эки жолун көрсөтө кетебиз.

Элементардык жолду колдонуу. x_1 жана x_2 лер $x_1<x_2$ шарты аткарылгандай болуп, $(-\infty, +\infty)$ аралыгынан алынган аргументтин эки каалаган маанилери болсун. y_1 жана y_2 лердин маанилери $(0, \pi)$ аралыгына тиешелүү жана $\mathrm{ctg} y_1=x_1$, $\mathrm{ctg} y_2=x_2$, $x_1<x_2$ болгондуктан, $\mathrm{ctg} y_1<\mathrm{ctg} y_2$ болот. $y_1, y_2 \in (0, \pi)$. Демек, $y_1>y_2$. Анда $y=\mathrm{arcctg} x$ функциясы $(-\infty, +\infty)$ аралыгында кемүүчү болот, экстремалдык чекиттери жок болот.

Туундуну колдонуу. $y' = -\frac{1}{1+x^2}<0$. демек, функция кемүүчү,экстремалдык чекиттери жок.

5. Функциянын томпоктугу, иймектиги жана ийилүү чекиттери. $y''=\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $y''=0$, $x=0$. $0<x<+\infty$ болсо, $y''>0$ болот, функция иймек, $-\infty<x<0$ болсо, $y''<0$ болот, функция томпок, $x=0$ чекити функциянын ийилүү чекити болот.

6. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \mathrm{arcctg}\, x = 0$, себеби: $x=\mathrm{ctg} y$ функциясында $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \mathrm{ctg}\, y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{arcctg}\, x = \pi$, себеби: $x=\mathrm{ctg} y$ функциясы $\lim\limits_{\substack{y\to \pi\\ y<\pi}} \mathrm{ctg}\, y = -\infty$.

7. Бул функциянын маанилеринин областы $(0, \pi)$ аралыгы болот (жогор жакта көрсөтүлдү).

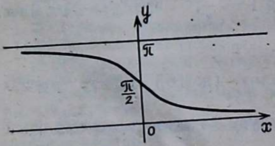
8. Функциянын эң чоң жана эң кичине маанилери жок (7-касиеттин негизинде).

9. Ошол эле 7-касиеттин негизинде, функция $(0, \pi)$ аралыгы менен чектелген.

10. Функциянын нөлү жок жана дайыма $\mathrm{arcctg} x>0$ (7-касиеттин негизинде).

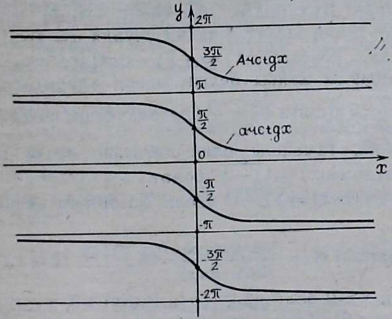
11. Функциянын графигинин горизонталь асимптоталары $y=0$, $y=\pi$ сызыктары болот.

12. Функциянын графиги (75-чийме).



75-чийме

$(0, \pi)$ аралыгынын каалаган сандагы бүтүн мезгилге жылдыруудан алынган ар бир $(\pi k, \pi+\pi k)$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ аралыгында $x=\mathrm{ctg}\, y$ функциясы кемийт, демек, тескери функцияга өтүүгө болот. Анда $y=\mathrm{arcctg}\, x+\pi k$ деп жазууга болот. Биз бул жерде көп маанилүү функцияга ээ болдук. Ошентип, $x=\mathrm{ctg}\, y$ функциясынын аныкталуу обласын үчүн $(0, \pi)$ аралыгын алуу менен чектебей, жалпы эле $(\pi k, \pi+\pi k)$ аралыгын алсак, ага тескери функция көп маанилүү болот. Аны $y=\mathrm{Arcctg}\, x$ деп белгилешет. Демек, $\mathrm{Arcctg}\, x=\mathrm{arcctg}\, x+\pi k$. Мисалы: $\mathrm{Arcctg}\, \frac{1}{\sqrt{3}} = \mathrm{arcctg}\, \frac{1}{\sqrt{3}} + \pi k = \frac{\pi}{3} + \pi k$. $y=\mathrm{arcctg}\, x$ бир маанилүү функциясы $\mathrm{Arcctg}\, x$ көп маанилүү функциясынын башкы тармагы (башкы мааниси) деп аталат. Ал үчүн $0<\mathrm{arcctg}\, x\leqslant\pi$ аралыгы алынганын көрдүк. Анын мааниси үчүн $(\pi+2\pi)$, $(2\pi, 3\pi), \dots$ $(\pi k, \pi+\pi k), \dots$ аралыктарынын каалаган бирөөнү алууга болот эле. Бирок $\mathrm{arcctg}\, x$ үчүн, б. а. $\mathrm{Arcctg}\, x$ тин башкы мааниси үчүн бул аралыктардын ичинен эң кичине терс эмес сандар менен чектелгенин, графиги координаталар башталышына эң жакын жайгашканын кабыл алуу шартташылган. $\mathrm{Arcctg}\, x$ функциясынын графиги 76-чиймеде көрсөтүлгөн.



76-чийме

Суроолор

1. $y=\mathrm{arcctg}\, x$ функциясынын аныктамасын айтып бергиле жана анын бар болорун далилдегиле.

2. Бул функциянын аныкталуу жана маанилеринин областы кандай аралыктар болот?

3. Функциянын монотондуулугу жана экстремалдык чекиттери жөнүндө айтып бергиле.

4. Функциянын ийкемтиги, томпоктугу жана ийилүү чекиттери жөнүндө эмне билесиңер?

5. Бул функциянын нөлү барбы? Белгилеринин туруктуу аралыктары кандай?

6. Функциянын графигин сызып, ал боюнча касиеттерин айтып бергиле.

7. $y=\mathrm{arcctg}x$ функциясы кантип келип чыкты? Анын башкы мааниси эмне болот? Бул функциянын графигин сызгыла.

5. Тескери тригонометриялык функциялардын тригонометриялык функциялары. а) Жогоруда берилген функциялардын[1] аныктамаларынын негизинде $-1 \leqslant x \leqslant +1$ болгондо,

$$\sin(\arcsin x)=x \ (1), \ \cos(\arccos x)=x \qquad (2)$$

болору бизге белгилүү.

$$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}x)=x \ (3), \ \mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}x)=x \qquad (4)$$

болору бизге белгилүү.

б) $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$ болорун далилдегиле. Бул барабардыктын сол жагы $x \rightarrow \arcsin x \rightarrow \cos(\arcsin x)$ схемасы боюнча түзүлгөн татаал функция болору көрүнүп турат. Биз $\arcsin x$ тин косинусун эсептеп чыгаруубуз керек, ал үчүн жогорудагы «а» пунктунун формулаларын пайдаланууга, атап айтканда (1) формуланы пайдаланууга келтирүүбүз керек. Бул болсо, $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ формуласын колдонууну талап кылат. Биздин учурда $\alpha=\arcsin x$ экенин эске алсак, $\cos(\arcsin x)=\pm\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}=\pm\sqrt{1-x^2}$ болот. Тамырды кайсы белги менен аларыбызды карап көрөлү. $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant +\frac{\pi}{2}$ болгондуктан, $\cos(\arcsin x) \geqslant 0$ болот, демек, тамырды плюс белгиси менен гана алуу керек: $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$ болот.

в) $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$ экени жогоркуга окшош далилденет.

г) $$\mathrm{ctg}(\arcsin x)=\frac{\cos(\arcsin x)}{\sin(\arcsin x)}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \ (x \neq 0).$$

Мындан $x>0$ болгондо, $\mathrm{ctg}(\arcsin x)>0$, $x<0$ болгондо, $\mathrm{ctg}(\arcsin x)<0$ болору көрүнүп турат, демек, $\mathrm{ctg}(\mathrm{arsin}x)$ тин белгиси x тин белгиси менен аныкталат. Мында x тин мааниси $[-1, 0)$ жана $(0, +1]$ аралыктарында жатат.

---

[1] Тескери тригонометриялык функцияларды кыскалык үчүн аркфункциялар деп да аташат.

Ошондуктан барабардыктын оң жагындагы бөлчөк плюс белгиси менен алынды.

д) $\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ экенин далилде. Муну далилдөө үчүн «а» пунктундагы 4-формуланы колдонууга келтиребиз, ал үчүн $\cos\alpha = \pm\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$ формуласын колдонуу талап кылынат. Биздин учурда $\alpha = \operatorname{arcctg} x$ экенин эске алсак.

$$\cos(\operatorname{arcctg} x) = \pm\frac{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2(\operatorname{arcctg} x)}} = \pm\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$ болгондуктан $x > 0$ болгондо, $\cos(\operatorname{arcctg} x) > 0$, $x < 0$ болгондо, $\cos(\operatorname{arcctg} x) < 0$, б. а. $\cos(\operatorname{arcctg} x)$ тин белгиси x тин белгиси менен аныкталат, демек барабардыктын оң жагындагы бөлчөктүн алдына плюс белгисин коюу керек.

$$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x},$$

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad \operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2}$$

болорун өзүңөр жогоркуларга окшоштуруп текшергиле.

Биз жогоруда карап өткөн формулалар кошуунун, кемитүүнүн, көбөйтүүнүн жана бөлүүнүн тригонометриялык формулалары боюнча өзгөртүп, түзүүлөрдү аткарганда кеңири колдонулат. Мындай өзгөртүп түзүүлөрдүн айрымдарын көрсөтө кетмекчибиз.

1) $\sin(2\arcsin x)$ ти $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ формуласын колдонуп, өзгөртүп түзөбүз: $\sin(2\arcsin x) = 2\sin(\arcsin x)$ $\cos(\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

2) Ушуга окшоштуруп, төмөнкү барабардыктарды далилдөөгө болот:

$$\cos(2\arccos x) = \cos^2(\arccos x) - \sin^2(\arccos x) = x^2 - (1 - x^2) = 2x^2 - 1;$$

$$\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} x) = \frac{2\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{1 - \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{2x}{1-x^2} \quad (x \neq \pm 1).$$

3) $\sin(\arccos x + \arcsin y) = \sin(\arccos x)\cdot\cos(\arcsin y) + \cos(\arccos x)\cdot\sin(\arcsin y) = \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2} + xy$.

Мында жогорку формулалар жана $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ формуласы колдонулду.

4) Ушуга окшоштуруп, төмөнкүлөрдү өзүңөр далилдегиле:

$$\sin(\arcsin x+\arcsin y)=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2};$$

$$\cos(\arccos x+\arccos y)=xy-\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2};$$

$$\sin(\arcsin x-\arcsin y)=x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2};$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} y)=\frac{x-y}{1+xy}.$$

5) $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)$ ти өзгөртүп түзүү үчүн $\alpha=\arcsin x$ деп алып, $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ формуласын колдонобуз. Анда $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos(\arccos x)}{2}}=$

$$=\pm\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}}=\pm\frac{x}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-x^2})}}.$$

$\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)$тин белгиси, x тин белгиси менен дал келет. Ошондуктан акыркы бөлчөктүн алдын плюс белгиси менен алуу керек.

6) Ушуга окшоштуруп, төмөнкүлөрдү өзүңөр далилдегиле:

$$\cos\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)=\sqrt{\frac{1+x}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right)=\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}.$$

Мисалдар:

1) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{8}{17}\right)=\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)\cos\left(\arcsin\frac{8}{17}\right)-$

$$-\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)\sin\left(\arcsin\frac{8}{17}\right)=\sqrt{1-\frac{9}{25}}\cdot\sqrt{1-\frac{64}{289}}-$$

$$-\frac{3}{5}\cdot\frac{8}{17}=\frac{4}{5}\cdot\frac{15}{17}-\frac{24}{85}=\frac{36}{85};$$

2) $\sin\left(2\arccos\frac{2}{7}\right)=2\sin\left(\arccos\frac{2}{7}\right)\cos\left(\arccos\frac{2}{7}\right)=$

$$=2.\ \frac{\sqrt{45}}{7}\cdot\frac{2}{7}=\frac{12}{49}\sqrt{5}.$$

6. Тескери тригонометриялык функциялардын арасындагы негизги катнаштар. Эгерде $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$ жана $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$ болорун эске алсак, $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$ кө ээ болобуз. Бул мисалдан берилген сан ар түрдүү аргументтин арктангенси жана арксинусу катарында туюнтула аларын көрөбүз. Мындан берилген аргументтин кандайдыр бир аркфункциясын экинчи бир аргументтин башка аркфункциясына өзгөртүп түзүүгө болору келип чыгат.

а) Маанилери ошол эле бир аралыкта жаткан эки аркфункциянын бирин экинчисине өзгөртүп түзүү.

$y=\arccos(x)$ ти $(-1<x<1)$ жана $y=\operatorname{arcctg}x$ $(-\infty<x<+\infty)$ функцияларын алалы. Бул функциялардын маанилери ошол эле бир $(0,\ \pi)$ аралыгында жатат, ошондуктан берилген сан анын косинусу же котангенси аркылуу бир маанилүү аныктала алат. Ошентип $\operatorname{ctg}(\arccos x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ экенин билип, $\arccos x=\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(x\neq 1)$ экендигине ээ болобуз жана тескерисинче $\cos(\operatorname{arcctg}x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ти билип $\operatorname{arcctg}x=\arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ке ээ болобуз. Мындан, бир аркфункцияны экинчиси аркылуу туюнтуу үчүн биринчи аркфункциядан экинчиге карата түз функция болгон тригонометриялык функцияны алуудан, ишти баштоо керек экени келип чыгат. Ушуга окшоштуруп, өзүңөр арксинусту арктангенс аркылуу туюнткула.

б) Маанилери ар башка аралыктарда жаткан эки аркфункциялардын бирин экинчисине өзгөртүп түзүү. татаалданат.

Бул учурда мурунку учурга караганда иш бир кыйла

1) $y=\arccos$ функциясын акрсинуска өзгөртүп түзүү керек болсун дейли. $0\leqslant x\leqslant 1$ болсо, $0\leqslant\arccos x\leqslant+\frac{\pi}{2}$ болот. y саны $\sqrt{1-x^2}$ ка барабар болгон синуска ээ болот, ошондуктан $\arccos x=\arcsin\sqrt{1-x^2}$.

Эгерде $-1\leqslant x\leqslant 0$ болсо, $\frac{\pi}{2}\leqslant\arccos x\leqslant\pi$ болот, ал эми

$\arcsin\sqrt{1-x^2}$ үчүн $0 \leqslant \arcsin\sqrt{1-x^2} \leqslant +\frac{\pi}{2}$ болот. Мындан, $x<0$ болгондо, жогорку барабардык орундала албайт, себеби: $\arccos x$, $\arcsin\sqrt{1-x^2}$ тардын маанилери ар кайсы аралыктарда жатат. $x<0$ болсо, $-x>0$ болот жана $\arccos x=\pi-\arccos(-x)=\pi-\arcsin\sqrt{1-x^2}$.

Ошентип,

$$\arccos x = \begin{cases} \arcsin\sqrt{1-x^2}, \text{ эгер } 0 \leqslant x \leqslant +1 \text{ болсо,} \\ \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2}, \text{ эгер } -1 \leqslant x \leqslant 0 \text{ болсо.} \end{cases}$$

Ушуга окшош ой жүгүртүү менен, $x \geqslant 0$ болгондо, $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2}$. Эгер $-1 \leqslant x \leqslant 0$ болсо, $\arcsin x = -\arcsin(-x) = -\arccos\sqrt{1-x^2}$.

Ошентип, $\arcsin x = \begin{cases} \arccos\sqrt{1-x^2}, \text{ эгер } 0 \leqslant x \leqslant +1, \\ -\arccos\sqrt{1-x^2}, \text{ эгер } -1 \leqslant x \leqslant 0. \end{cases}$

2) $\operatorname{arctg} x$ ти арккосинуска өзгөртүп түзүү.

$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ катнашынан $x \geqslant 0$ болгондо,

$\operatorname{arctg} x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ге ээ болобуз.

Эгер $x<0$ болсо, анда $-x>0$ жана

$\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arctg}(-x) = -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

$$\text{Демек, } \operatorname{arctg} x = \begin{cases} \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ эгер } x \geqslant 0 \text{ болсо,} \\ -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ эгер } x \leqslant 0 \text{ болсо.} \end{cases}$$

Ушуга окшош эле, эгер $0<x \leqslant 1$ болсо,

$\arccos x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $-1 \leqslant x < 0$ болсо,

$\arccos x = \pi - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{-x} = \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

Ошентип,

$$\arccos x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \text{ эгер } 0 < x \leqslant 1 \text{ болсо,} \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \text{ эгер } -1 \leqslant x < 1 \text{ болсо.} \end{cases}$$

Буларга окшоштуруп, төмөнкүлөрдү өзүңөр далилдегиле:

$$\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arcctg} \dfrac{1}{x}, \text{ эгер } x>0 \text{ болсо,} \\ \operatorname{arcctg} \dfrac{1}{x} - \pi, \text{ эгер } x<0 \text{ болсо.} \end{cases}$$

$$\arcsin x = \begin{cases} \operatorname{arcctg} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \text{ эгер } 0<x\leqslant 1 \text{ болсо,} \\ \operatorname{arcctg} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi, \text{ эгер } -1\leqslant x<0 \text{ болсо.} \end{cases}$$

в) 1) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ болорун далилдегиле.

Муну далилдөө үчүн $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$ экенин далилдөө жетиштүү. $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant +\frac{\pi}{2}$ (аныктама негизинде), $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$ (аныктама негизинде). Бул барабарсыздыктын ар бир мүчөсүнөн $\frac{\pi}{2}$ ни алып жана -1 ге көбөйтсөк: $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} - \arccos x \leqslant +\frac{\pi}{2}$ келип чыгат.

Анда $\sin(\arcsin x) = x$,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x.$$

Демек, $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$ болот, мындан далилдөө талап кылынган $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ келип чыгат.

2) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$ катнашын окшоштуруп өзүңөр далилдегиле.

г) 1) $\underset{x>0}{\arcsin x} + \underset{y>0}{\arcsin y} = \arccos(\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} - xy)$ далилдегиле. Сол жакккы суммадан косинус алабыз: $\cos(\arcsin x + \arcsin y) = \cos(\arcsin x) \quad \cos(\arcsin y) - \sin(\arcsin x) \cdot \sin(\arcsin y) = \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} - xy.$

Мындан, далилдейбиз деген барабардык келип чыгат.

2) $\underset{x>0}{\operatorname{arctg}}\, x - \underset{y>0}{\operatorname{arctg}}\, y = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}$ ти далилдегиле.

Бул катнаш § 23, 5, 4-нүн акыркы формуласынан түздөн түз келип чыгат.

Мисалдар. 1) $\arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{12}{13} = \frac{\pi}{2}$ экенин далилдегиле. $\arcsin \frac{5}{13}$ ти арккосунис аркылуу туюнтабыз.

$$\arcsin \frac{5}{13} = \arccos \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \arccos \frac{12}{13}.$$

Анда

$$\arccos \frac{12}{13} + \arcsin \frac{5}{13} = \frac{\pi}{2}$$

болот (§ 23, 6, в).

2) $\arcsin \frac{4}{5} + \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} = \operatorname{arcctg} \frac{2}{11}$ экенин текшергиле.

Эки жагынан тең синус алабыз:

$$\sin\left(\arcsin \frac{4}{5}\right) \cos\left(\arccos \frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \cos\left(\arcsin \frac{4}{5}\right) \times$$

$$\times \sin\left(\arccos \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\left(\operatorname{arcctg} \frac{2}{11}\right)}};$$

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \sqrt{1-\frac{16}{25}} \cdot \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{121}}};$$

$$\frac{8}{5\sqrt{5}} + \frac{3}{5\sqrt{5}} = \frac{11}{\sqrt{125}}, \quad \frac{11}{5\sqrt{5}} = \frac{11}{5\sqrt{5}}$$

экендиги далилденди.

Көнүгүүлөр

161. Төмөнкүлөрдү иштегиле:
1) $\operatorname{arcctg} x$ ти арксинус аркылуу туюнткула;
2) $\operatorname{arcctg} x$ ти арктангенс аркылуу туюнткула.

162. Төмөнкүлөрдү тапкыла:

1) $\sin\left(\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{8}{17}\right) =;$

2) $\cos\left(\arccos \frac{2}{3} + \arccos \frac{9}{11}\right) =;$

3) $\cos\left(2\arcsin \frac{2}{7}\right) =;$

4) $\sin(2\operatorname{arctg} x) =;$

5) $\arcsin\dfrac{1}{3}+\arcsin\dfrac{1}{2}=.$

163. Төмөнкүлөрдү далилдегиле:

1) $\arccos x+\arccos y=\arccos(xy-\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2})$, $(0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1)$;

2) $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y=\operatorname{arctg}\dfrac{1-xy}{x+y}$, $(x>0,\ y>0)$

3) $\operatorname{arcctg} x+\operatorname{arcctg} y=\operatorname{arcctg}\dfrac{xy-1}{x+y}$, $(x>0,\ y>0)$

4) $\operatorname{arcctg} x-\operatorname{arcctg} y=\operatorname{arcctg}\dfrac{y-x}{1+xy}$, $(x>0,\ y>0)$

164. Графикти жөнөкөй өзгөртүп түзүү эрежелери боюнча төмөнкү функциялардын графигин түзүп, ал график боюнча касиеттерин изилдегиле.

1) $y=\pi+\arcsin(x+1)$;

2) $y=\arccos(x-2)+\dfrac{\pi}{2}$;

3) $y=\operatorname{arctg}(x+3)-\pi$;

4) $y=\dfrac{\pi}{2}+\operatorname{arcctg}(x+2)$.

Төмөнкү функциялардын касиеттерин алдын ала аналитикалык түрдө изилдеп алып, графигин түзгүлө жана ал график боюнча функциянын касиеттерин айтып бергиле.

165. $y=\operatorname{arcctg} x-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

166. $y=\arccos x^2$.

167. $y=x+2\operatorname{arcctg} x$.

168. $y=\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

ЖООПТОР, КӨРСӨТМӨЛӨР

29. $(-\infty,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ +\infty)$.

30. $[-3,\ +3]$.

31. $[-4,\ -1],\ [+1,\ +4]$.

32. $[1,\ +\infty)$.

33. $(-\infty,\ -1),\ [1,\ +\infty)$.

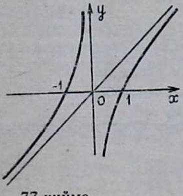
34. $(-\infty,\ -2),\ (2,\ +\infty)$.

35. $(2\pi k,\ 2(k+1)\pi),\ k=0,\ +1,\ +2,\ \ldots$

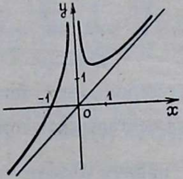
36. $\left[-\dfrac{\pi}{3}+\pi k,\ \dfrac{\pi}{2}+\pi k\right),\ \left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ \dfrac{\pi}{4}+\pi k\right]$.

37. $(-\infty, +\infty)$.
38. $[-3, +\infty)$.
39. $(-\infty, 2)$, $(2, +\infty)$.
40. $(-\infty, 3)$, $(3, +\infty)$.
41. $(-\infty, \lg 3]$.
42. $[-\sqrt{2}, +\sqrt{2}]$.
45. Жуп.
46. Жуп.
47. Так.
49. Жуп.
50. Так.
51. Жуп.
52. Жуп.
53. $l=1$. **54.** $l=\pi$. **55.** Мезгилсиз. **56.** $l=\pi$.
57. $l=2\pi$
58. $l=30\pi$. 59. $l=2\pi$. **60.** $l=\frac{\pi}{2}$. **61.** $l=\pi$.
62. $l=\frac{\pi}{2}$. **63.** $(-\infty, +\infty)$ өсөт. **64.** $(-\infty, +\infty)$ кемийт.
65. $(-\infty, 0)$ кемийт.
    $(0, +\infty)$ өсөт.
67. $(-\infty, 0)$ өсөт.
    $(0, +\infty)$ кемийт.
68. $(-\infty, 3)$ кемийт.
    $(3, +\infty)$ өсөт.
69. $(-\infty, +\infty)$ өсөт.
70. $(-\infty, +\infty)$ кемийт.
74. $(0, +\infty)$ өсөт.
75. $(0, +\infty)$ өсөт.
76. $(-\infty, 0)$ өсөт, $(0, +\infty)$ кемийт.
77. $(0, +\infty)$ өсөт.
86. $x=2$ болгондо, функциянын $y_{\text{эң к.}} = 4$
87. $x=3$ болгондо, $y_{\text{эң ч.}} = 2$
88. $x=1$ болгондо, $y_{\text{эң к.}} = 2$
89. $5+5+5+5=20$ болгондо, көбөйтүндү $5\cdot5\cdot5\cdot5=625$ эң чоң болот.
90. $4\cdot4\cdot4=64$ болгондо, сумма $4+4+4=12$ эң кичине болот.
91. Жагы $\sqrt{5}$ болгон квадрат.
92. $x=1$ болгондо, $y_{\text{эң ч.}} = 1$
93. Иймек, ийилүү чекити жок.
94. Томпок, ийилүү чекити жок.
95. Иймек, ийилүү чекити жок.
96. Томпок, ийилүү чекити жок.

97. $(-\infty, 0)$ аралыгында томпок, $(0, +\infty)$ аралыгында иймек, ийилүү чекити $x=0$.
98. $(-\infty, 0)$ аралыгында иймек, $(0, +\infty)$ аралыгында томпок, ийилүү чекити $x=0$.
99. Иймек, ийилүү чекити жок.
100. $(-\infty, 4)$ аралыгында томпок, $(0, +\infty)$ аралыгында иймек, ийилүү чекити $x=4$.
101. Иймек, ийилүү чекити жок.
102. Томпок, ийилүү чекити жок.
112. Нөлдөрү $x=\pm 3$, $(-\infty, 3)$, $(3, +\infty)$ аралыктарында $y>0$, $(-3, +3)$ аралыгында $y<0$.
115. Нөлдөрү $x_1=2$, $x_2=3$, $(-\infty, 2)$, $(3, +\infty)$ аралыктарында $y<0$, $(2, 3)$ аралыгында $y>0$.
116. Нөлдөрү $x_{1,2}=\pm 1$, $x_{3,4}=\pm 2$
$(-\infty, -2)$, $(2, +\infty)$, $(-1, +1)$ аралыктарында $y>0$, $(-2, -1)$, $(+1, -2)$ аралыктарында $y<0$.
117. $x=0$. **118.** $x=3$, $y=\frac{3}{2}$.
119. $x=1$, $y=-2$.
120. $y=1$. **121.** $y=x$.
122. $x=1$, $y=x+2$.
123. $y=x$. **124.** $y=x$.
139. Аныкталуу областы: $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$; так функция, өзүнүн аныкталуу областында үзгүлтүксүз, өсүүчү функция, $(-\infty, 0)$ аралыгында иймек, $(0, +\infty)$ аралыгында томпок, $x \to +\infty$ да $y \to +\infty$, $x \to \infty$ да $y \to -\infty$; $x=0$ чекитинде бир жактуу пределдери $-\infty$ жана $+\infty$; маанилеринин областы $(-\infty, +\infty)$ аралыгы, эң кичине, эң чоң мааниси жок, чектелбеген функция, $x=\pm 1$ нөлдөрү, $(-1, 0)$, $(+1, +\infty)$ аралыгында $y>0$, $(-\infty, -1)$, $(0, +1)$ аралыктарында $y<0$; асимптоталары $x=0$, $y=x$ сызыктары болот, графиги (77-чийме).
140. Аныкталуу областы: $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ аралыктары; жуп да, так да эмес, өзүнүн аныкталуу областында



77-чийме



78-чийме

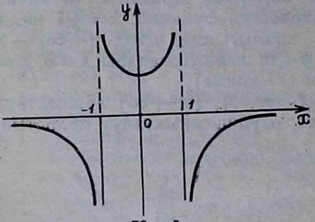
үзгүлтүксүз, $(-\infty, 0)\left(\sqrt[3]{2}, +\infty\right)$ аралыктарында өсүүчү $\left(0, \sqrt[3]{2}\right)$ аралыгында кемүүчү, минимум чекити $x=\sqrt[3]{2}$, функция бардык аныкталуу областында иймек, $x\to+\infty$ да $y\to+\infty$, $x\to-\infty$ да $x\to-\infty$, $x\to 0$ да $y\to+\infty$, маанилеринин областы $(-\infty, +\infty)$ аралыгы; эң чоң, эң кичине мааниси жок; чектелбеген; $x=-1$ нөлү, $(-\infty, -1)$ де $y<0$; калган аралыктарда $y>0$. $x=0$, $y=x$ сызыктары асимптоталар болот. Графиги (79-чийме).

141. Аныкталуу областы: $(-\infty, -1)$, $(-1, +1)$, $(+1, +\infty)$ аралыктарында, жуп функция; аныкталуу областында үзгүлтүксүз; $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ аралыктарында кемүүчү, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$ аралыктарында өсүүчү: $x=0$ минимум чекити; $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$ аралыктарында томпок, $(-1, 1)$ аралыгында иймек,

$$x\to+\infty \text{ да } y\to 0, \quad \lim_{\substack{x\to-1\\ x<-1}} y = -\infty$$

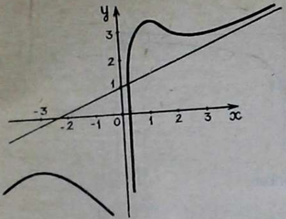
$$\lim_{\substack{x\to-1\\ x>-1}} y = +\infty; \quad \lim_{\substack{x\to+1\\ x<+1}} y = +\infty; \quad \lim_{\substack{x\to+\infty\\ x>+1}} y = -\infty$$

маанилеринин областы: $(-\infty, 0)$, $(+1, +\infty)$ аралыктары, эң чоң, эң кичине мааниси жок, чектелбеген; нөлдөрү жок, $(-\infty, -1)$, $(+1, +\infty)$ аралыктарда $y<0$, $(-1, +1)$ де $y>0$, $y=0$, $x=+1$, $x=-1$ сызыктары асимптоталары болот. Графиги (79-чийме).

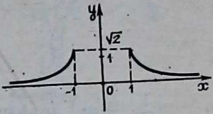


79-чийме

142. Аныкталуу областы $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ аралыктары; жуп да, так да эмес; $x\neq 0$ болгон бардык чекиттерде үзгүлтүксүз; $(-\infty, -3)$, $(0, 1)$, $(2, +\infty)$ аралыктарында өсөт, $(-3, 0)$, $(1, 2)$ аралыктарында кемийт, $x=-3$, $x=1$ чекити максимум, $x=2$ минимум чекити болот, $(-\infty, 0)$, $\left(0, \frac{9}{7}\right)$ аралыктарында томпок, $\left(\frac{9}{7}, +\infty\right)$ аралыгында иймек, $x=\frac{9}{7}$ ийилүү чекити;



80-чийме



81-чийме

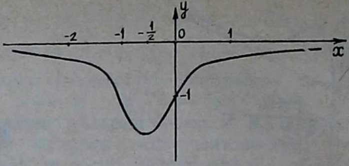
$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \pm\infty; \quad \lim_{x\to 0} y = -\infty, \quad x=0, \quad y=\frac{1}{2}x+1$$

сызыктары асимптоталар болот, графиги (80-чийме).

145. Аныкталуу областы: $(-\infty, -1)$, $[+1, +\infty)$ аралыктары; жуп; аныкталуу областында үзгүлтүксүз; $(-\infty, -1)$ аралыгында өсүүчү, $[+1, +\infty)$ аралыгында кемүүчү, экстремалдык чекити жок, иймек, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=0$ маанилеринин областы $(0, +\sqrt{2})$, чектелген, эң кичине мааниси жок, $\sqrt{2}$—эң чоң мааниси, нөлү жок, дайыма $y>0$, $y=0$ сызыгы горизонталь асимптота, графиги (81-чийме).

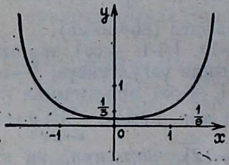
146. Бардык чыныгы сандардын көптүгүндө аныкталат; жуп да, так да эмес; үзгүлтүксүз; $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ де кемийт, $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$де өсөт, $x=-\frac{1}{2}$ минимум чекити, $(-\infty, -1)$, $(0, +\infty)$ аралыктарында томпок, $(-1, 0)$ аралыгында иймек, $x=0$, $x=-1$ ийилүү чекиттери, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=0$ маанилеринин областы $\left[-\sqrt[3]{4}, 0\right]$ аралыгы, эң чоң мааниси жок, эң кичине мааниси $-\sqrt[3]{4}$; чектелген, нөлү жок, дайыма $y<0$, $y=0$ сызыгы асимптотасы, графиги (82-чийме).

150. Аныкталуу областы $(-\infty, +\infty)$ аралыгы, жуп функция, үзгүлтүксүз, $(0, +\infty)$ аралыгында өсүүчү, $(-\infty, 0)$ аралыгында кемүүчү, $x=0$ минимум чекити, $y_{min}=\frac{1}{9}$; иймек, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=+\infty$ маанилеринин областы

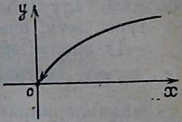


82-чийме

$\left[\frac{1}{9}, +\infty\right)$ аралыгы, эң кичине мааниси $+\frac{1}{9}$, эң чоң мааниси жок, асимптоталары жок, графиги (83-чийме).



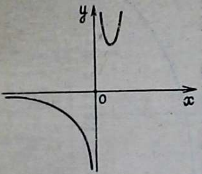
83-чийме



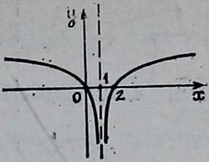
84-чийме

151. $(0, +\infty)$ аралыгы аныкталуу областы; жуп да, так да эмес; үзгүлтүксүз, өсүүчү, томпок, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} y = 0$ маанилеринин областы $(0, +\infty)$ аралыгы, асимптоталары жок, графиги (84-чийме).

152. $x \neq 0$ болгон бардык чыныгы сандардын көптүгүндө функция аныкталат, жуп да, так да эмес, аныкталуу областында үзгүлтүксүз, $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ аралыгында кемүүчү, $(1, +\infty)$ аралыгында өсүүчү, $x=1$ минимум чекит, $y_{\min}=e$, $(-\infty, 0)$ аралыгында томпок, $(0, +\infty)$ аралыгында иймек, ийилүү чекити жок, $\lim\limits_{x\to-\infty} y = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} y = -\infty$; маанилеринин областы $(-\infty, 0)$, $(e, +\infty)$ аралыктары, эң чоң, эң кичине мааниси жок, чектелбеген, нөлү жок, $(-\infty, 0)$ аралыгында $y<0$, $(0, +\infty)$ аралыгында $y>0$, $y=0$, $x=0$ сызыктары асимптоталар, графиги (85-чийме).



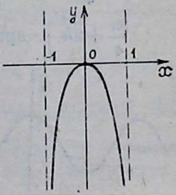
85-чийме



86-чийме

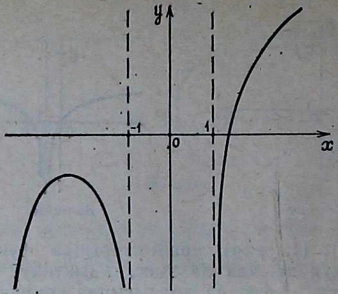
153. $(-\infty,\ 1)$, $(1,\ +\infty)$ аралыктарында функция аныкталат, жуп да, так да эмес, аныкталуу областында үзгүлтүксүз, $(-\infty,\ 1)$ аралыгында кемүүчү, $(1,\ +\infty)$ аралыгында өсүүчү, экстремалдык чекиттери жок, томпок, ийилүү чекити жок, $\lim\limits_{x\to\mp\infty} y=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1\\x<1}} y=-\infty$ маанилеринин областы $(-\infty,\ +\infty)$, $x=0$, $x=2$ функциянын нөлдөрү, $(-\infty,\ 0)$, $(2,\ +\infty)$ аралыктарында $y>0$; $(0,\ 1)$, $(1,\ 2)$ аралыктарында $y<0$, $x=1$ сызыгы асимптота, графиги (86-чийме).

154. $(-1,\ +1)$ аралыгы функциянын аныкталуу областы, жуп, үзгүлтүксүз, $(-1,\ 0)$ аралыгында өсүүчү, $(0,\ 1)$ аралыгында кемүүчү, $x=0$ максимум чекити, $y_{\max}=0$ томпок, ийилүү чекити жок, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=-\infty$; маанилеринин областы $[0,\ -\infty)$, эң чоң мааниси $y=0$, эң кичине мааниси жок, жогор жактан нөл менен чектелген, төмөн жактан чектелбеген, $x=0$ функциянын нөлү, $(-1,\ 0)$, $(0,\ +1)$ аралыктарында $y<0$, $x=1$, $x=-1$ асимптоталар, графиги (87-чийме).



87-чийме

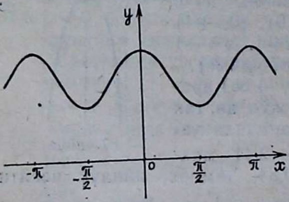
155. Функция $(-\infty,\ -1)$, $(1,\ +\infty)$ аралыктарында аныкталат; жуп да, так да эмес, аныкталуу областында үзгүлтүксүз, $x=-1-\sqrt{2}\approx-2{,}41$ максимум чекити, $y_{max}\approx-0{,}84$, томпок, ийилүү чекити жок, $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} y=-\infty$, $\underset{\substack{x\to1\\x>1}}{\mathrm{im}}\, y=-\infty$ маанилеринин областы, $(-\infty,\ +\infty)$



88-чийме

аралыгы, $x=-1$, $x=1$ асимптоталары, графиги (89-чийме).

157. $(-\infty, +\infty)$ аралыгында функция аныкталат, негизги мезгили π, жуп, үзгүлтүксүз, $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \pi k\right)$ аралыгында өсөт, $\left(\pi k,\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$ аралыгында кемийт, πk— максимум чекиттери, $\frac{\pi}{2}(2k+1)$ минимум чекиттери, $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ \frac{\pi}{4}+\pi k\right)$ аралыгында томпок, $\left(\frac{\pi}{4}+\pi k,\ \frac{3\pi}{4}+\pi k\right)$ аралыгында иймек, $\frac{\pi}{4}(2k+1)$ — ийилүү чекиттери, [2, 4] кесиндиси маанилеринин областы, нөлү жок, дайыма $y>0$, графиги (89-чийме). Көрсөтмө: адегенде берилген функцияны $3+\cos 2x$ түрүнө келтирип алуу ыңгайлуу.



89-чийме

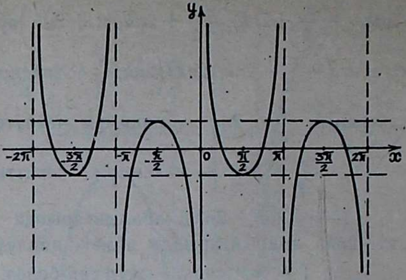
158. Функция $\frac{k}{\pi}(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ дан башка бардык чыныгы сандардын көптүгүндө аныкталат, негизги мезгили 2π, так, үзгүлтүксүз,

$(\pi + 2\pi k, \ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$, $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ \pi + 2\pi k\right)$ аралыктарында өсөт, $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ 2\pi k\right)\left(2\pi k, \ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$ аралыктарында кемийт, $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ — минимум чекиттери. $y_{min} = -1$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ — максимум чекиттери, $y_{\max} = 1$, $(-\pi + 2\pi k, \ 2\pi k)$ аралыктарында томпок, $(2\pi k, \ \pi + 2\pi k)$ аралыктарында иймек, ийилүү чекити жок, $\lim\limits_{\substack{x \to \pi k \\ x > \pi k}} y = \begin{cases} +\infty, & \text{эгер } k \text{ — жуп сан болсо,} \\ -\infty, & \text{эгер } k \text{ — так сан болсо.} \end{cases}$

$$\lim_{\substack{x \to \pi k \\ x < \pi k}} y = \begin{cases} +\infty, & \text{эгер } k \text{ — так сан болсо,} \\ -\infty, & \text{эгер } k \text{ — жуп сан болсо.} \end{cases}$$

Бир мезгилдин ичинде $(-\infty, \ 1)$, $(-1, \ \infty)$ аралыктарында өзгөрөт, жалпысынан эң чоң, эң кичине мааниси жок, чектелбейт: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k$ чекиттери функциянын нөлдөрү. $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \ \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \ 2\pi k\right)$, $\left(-\pi + 2\pi k, \ -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right)$ аралыктарында $y < 0$; $\left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \ -\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)$; $\left(2\pi k, \ \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)$; $\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \ \pi + 2\pi k\right)$ аралыктарында, $y < 0$, $x = \pi k$ — сызыктары)вертикаль асимптоталар, графиги (90-чийме).

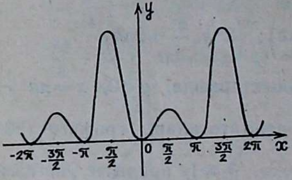
159. Аныкталуу областы $(-\infty, \ +\infty)$ аралыгы, негизги мезгили — $2\pi k$ жуп да, так да эмес, үзгүлтүксүз, $\left(\pi k, \ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$ аралыгында өсөт, $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k, \ \pi + \pi k\right)$ аралыгында кемийт, πk — минимум, $\frac{\pi}{2} + \pi k$ максимум чекиттери, $y_{min} = 0$, $y_{max}\Big|_{x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k} = \frac{1}{3}$;



90-чийме

$y_{max}\Big|\ x=\frac{\pi}{2}+\pi k=1$; [0, 1] кесиндиси маанилеринин областы, πk — нөлдөрү, πk дан башка бардык чекиттерде $y>0$, асимптоталары жок, графиги (91-чийме).

Эскертүү. Жөнөкөйлүк үчүн функцияны томпоктукка жана ийметиккe изилдебей туруп графиги түзүлдү, бирок каалагандар туундуну колдонуп, андай изилдөө жүргүзө алат.



91-чийме

160. Функция πk ($k=0, \pm 1, +2, ...$) дан башка бардык чыныгы сандардын көптүгүндө аныкталат, негизги мезгили 2π, так, аныкталуу областында үзгүлтүксүз, эгер $(-\pi, \pi)$ бир мезгилге барабар аралыгын карасак: $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$ аралыктарында кемийт,

$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$, $\left(-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right)$

аралыктарында өсөт; $x=\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{2\pi}{3}$, $x=-\frac{\pi}{2}$ чекиттеринде тиешелүү түрдө $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}, -\frac{7}{4}$ лерге барабар болгон функциянын минимум маанилери,

$x=-\frac{2\pi}{3}$, $x=-\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{2}$

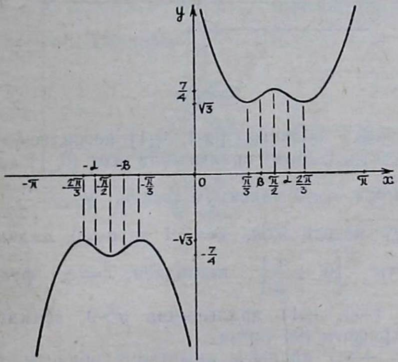
чекиттеринде тиешелүү түрдө $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, $\frac{7}{4}$ лерге барабар болгон функциянын максимум маанилери бар, $(-\pi, -\alpha)$, $(-\beta, 0)$, (β, α) аралыктарында функция томпок, $(-\beta, -\alpha)$, $(0, \beta)$, (α, π) аралыктарында иймек; α, β, $-\alpha$, $-\beta$ ийилүү чекиттери. Мында,

$$\beta = \arcsin\sqrt{\frac{-3+\sqrt{105}}{8}}.$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{\substack{x\to \pi\\ x<\pi}} f(x) = +\infty, \quad \lim_{\substack{x\to -\pi\\ x>-\pi}} f(x) = -\infty.$$

$[\sqrt{3}, +\infty)$, $(-\infty, -\sqrt{3}]$ аралыктары маанилеринин областы, нөлдөрү жок, $(0, \pi)$ аралыгында $f(x)>0$; $(-\pi, 0)$ аралыгында $f(x)<0$; $x=0$; $x=\pi$, $x=-\pi$ сызыктары вертикаль асимптоталары, графиги (92-чийме).



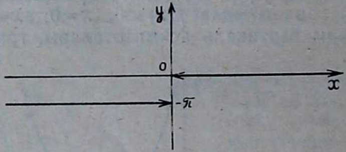
92-чийме

161. 1) $\operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \arcsin \dfrac{1}{1+x^2}, \text{ эгер } x > 0 \text{ болсо}, \\ \pi - \arcsin \dfrac{1}{1+x^2}, \text{ эгер } x < 0 \text{ болсо}. \end{cases}$

2) $\operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}, \text{ эгер } x > 0 \text{ болсо}, \\ \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}, \text{ эгер } x < 0 \text{ болсо}. \end{cases}$

162. 1) $\frac{77}{85}$; 2) $-\frac{33}{77}$; 3) $\frac{41}{49}$; 4) $\frac{2x}{1+x^2}$; 5) $\arcsin \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}$.

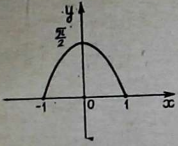
165. Аныкталуу областы $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ аралыктары, жуп да, так да эмес; аныкталуу областында үзгүлтүксүз, монотондуу эмес, экстремалдык чекиттери жок, томпок да, иймек да эмес, ийилүү чекити жок, $x>0$ болсо, $y=0$, $x<0$ болсо, $y=-\pi$, маанилеринин областы ушул эки мааниден турат, эң чоң мааниси 0, эң кичине мааниси $-\pi$, чектелген, асимптоталары жок, графиги (93-чийме).



93-чийме

166. Аныкталуу областы $[-1, +1]$ кесиндиси, жуп, үзгүлтүксүз, $(-1, 0)$ аралыгында өсөт $(0, 1)$ аралыгында кемийт, $x=0$ максимум чекити, $y_{max}=\frac{\pi}{2}$ томпок, ийилүү чекити жок, $x=\pm 1$ де $y=0$, маанилеринин областы $\left[0, +\frac{\pi}{2}\right]$ кесиндиси, $x=\pm 1$ функциянын нөлү, $(-1, +1)$ аралыгында $y>0$, асимптоталары жок, графиги (94-чийме).

167. $(-\infty, +\infty)$ аралыгы аныкталуу областы, жуп да, так да эмес, үзгүлтүксүз, $x=-1$ максимум чекити,

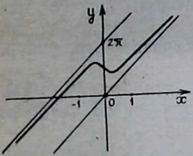


94-чийме

$x=1$ минимум чекити, $(-\infty, -1)$, $(+1, +\infty)$ аралыгында өсөт, $(-1, +1)$ аралыгында кемийт, $(-\infty, 0)$ аралыгында томпок, $(0, +\infty)$ аралыгында иймек, $x=0$ ийилүү чекити:

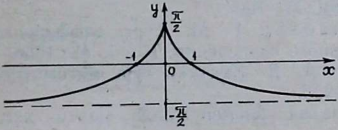
$$\lim_{x\to-\infty} y = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} y = +\infty$$

болот, $(-\infty, +\infty)$ аралыгы маанилеринин областы, $y=x$, $y=x+2\pi$ сызыктары функциянын графигинин жантык асимптоталары, графиги (95-чийме).



95-чийме

168. Бардык сан огунда аныкталат, жуп, үзгүлтүксүз, $x=0$ максимум чекити, $y_{max}=\frac{\pi}{2}$, $(-\infty, 0)$ аралыгында өсөт, $\left(0, +\frac{\pi}{2}\right)$ аралыгында кемийт, иймек, ийилүү чекити жок, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = -\frac{\pi}{2}$; маанилеринин областы $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ аралыгы, $x=\pm 1$ нөлдөрү, $(-\infty, -1)$, $(+1, +\infty)$ аралыктарында $y<0$, $(-1, +1)$ де $y>0$, $x=-\frac{\pi}{2}$ горизонталь асимптотасы, графиги (96-чийме).



96-чийме

АДАБИЯТТАР

1. Энгельс Ф. Диалектика природы, М., 1975.
2. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа. М., 1963.
3. Гурский И. П. Функции и построение графиков. М., 1968.
4. Жак И. Е. Дифференциальное исчисление. М., 1960.
5. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Том I, М., 1981.
6. Лихолетов И. И. Элементарные функции. М., 1960.
7. Новоселов С. И. Алгебра и элементарные функции, М., 1952.
8. Новоселов С. И. Обратные тригонометрические функции. М., 1950.
9. Уваренков И. М., Маллер М. З. Курс математического анализа. I том, М., 1966.
10. Усубакунов Р. «Математикалык анализ». I. Фрунзе «Мектеп», 1975.
11. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. I том, М., 1968.
12. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том I, М., 1956.
13. Хинчин А. Я. Краткий курс математического анализа М., 1955.
14. Энциклопедия элементарной математики. Том III, М., 1952.

МАЗМУНУ

Саламат Мусаев

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ИССЛЕДОВАНИЕ

Учебное пособие утверждено Министерством высшего и среднего
специального образования Киргизской ССР для студентов
физико-математических факультетов пединститутов

(на киргизском языке)

Издательство «Мектеп»

Редактору *А. Рыскелдиев*
Сүрөт редактору *С. Усенов*
Техн. редактору *Б. Алымбаева*
Корректору *Р. Жолдошева*

35 т.

-1779-2